详细解答

STEP I 1991，第 16 题

概率与统计 • 条件概率

> **STEP I 1991，第 16 题**
>
> 继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：
>
> step.maths.org/questions/91-s1-q16

关键思路

把一切按观察时刻 $n = 0, 1, 2, \ldots$ 来整理，即每只爬行动物第一次察看马路之后的分钟数。蟾蜍的等候时间服从几何分布（geometric distribution），所以牠必定会过路。青蛙则不同：牠的规则迫使牠最迟在 $n = 3$ 时作出决定，所以牠的故事只有四个阶段，我们可以逐一列出牠在每个阶段安全过路的概率。有了这张清单，与蟾蜍的比较以及条件概率（conditional probability）都只不过是几个求和而已。

解答

全题假设各次观察时马路的状况互相独立（independent），每次安全的概率为 0.1，并且蟾蜍与青蛙的行动互相独立。这是合理的，因为青蛙是“稍后”才过路，时间并不相同。由于过路所需的时间可以忽略，在第 n 次观察时过路的爬行动物会在时间 n 分钟到达。

蟾蜍

蟾蜍只会在安全时过路，所以牠永远不会被辗过。经过第 $0, 1, \ldots, k$ 次观察后牠仍在等候的概率为 0.9^{k+1}，而这个概率趋向 0。所以牠最终会安全过路，概率为

$$\sum_{k=0}^{\infty} 0.9^k(0.1) = \frac{0.1}{1 - 0.9} = 1.$$

以 T 表示牠过路的时间。那么 $P(T = k) = 0.9^k(0.1)$，另外为方便稍后使用，$P(T > k) = 0.9^{k+1}$。

青蛙

在第 n 次观察时，若牠仍在等候：

- 有 0.1 的概率马路安全，牠安全过路；
- 有 $0.9 \cdot \frac{n}{3}$ 的概率马路不安全但牠照样过路，安全到达的概率为 0.2，被辗过的概率为 0.8；
- 有 $0.9\left(1-\frac{n}{3}\right)$ 的概率牠等待下一次观察。

在 $n=0$ 时牠绝不冒险，而在 $n=3$ 时，不安全也照样过路的机会是 1，所以若牠之前仍未出发，在 $n=3$ 时必定出发。特别地，$n>3$ 的情况永远不会出现。

牠在第 n 次观察时仍在等候的概率为

$$w_0=1,\quad w_1=0.9,\quad w_2=0.9\cdot 0.9\cdot\tfrac{2}{3}=0.54,\quad w_3=0.54\cdot 0.9\cdot\tfrac{1}{3}=0.162.$$

在第 n 次观察时，牠安全到达的概率为 $w_n\left(0.1+0.9\cdot\frac{n}{3}\cdot 0.2\right)=w_n(0.1+0.06n)$。以 s_n 表示这个概率，

$$s_0=1\times 0.1=0.1,\qquad s_1=0.9\times 0.16=0.144,$$
$$s_2=0.54\times 0.22=0.1188,\qquad s_3=0.162\times 0.28=0.04536.$$

因此

$$P(\text{青蛙安全过路})=0.1+0.144+0.1188+0.04536=\boxed{0.40816=\tfrac{2551}{6250}}.$$

牠被辗过的概率就是余下的 $1-0.40816=0.59184$。

两者皆安全，而青蛙较快

设 F 为青蛙安全到达的时间。我们需要两者都安全到达，并且 $F<T$。蟾蜍必定安全，而由独立性，

$$P(\text{青蛙安全过路于}n\text{ 且}T>n)=s_n\,P(T>n)=s_n(0.9)^{n+1}.$$

想一想 为甚么是 $T>n$ 而不是 $T\geq n$?

若两者在同一个观察时刻 n 过路，牠们所用的时间相同，青蛙并非严格地较快。所以蟾蜍在时间 n 的那次观察之后必须仍在等候，其概率为 0.9^{n+1}。对青蛙四个可能的时间求和，

$$\begin{aligned}P&=0.1(0.9)+0.144(0.81)+0.1188(0.729)+0.04536(0.6561)\\&=0.09+0.11664+0.0866052+0.029760696\\&=0.323005896\approx\boxed{0.323}.\end{aligned}$$

写成准确的分数，这就是 $\frac{40375737}{125000000}$。

最后一部分

设 A 为青蛙在第一次观察后 2 分钟仍未到达对面这一事件，R 为牠被辗过这一事件。由于过路是瞬间完成的，在 $n = 2$ 那次观察时安全过路的青蛙，在 2 分钟时已经到达。所以 A 是“在 $n = 0$、1 或 2 时安全过路”的补事件（complement）：

$$P(A) = 1 - (s_0 + s_1 + s_2) = 1 - 0.3628 = 0.6372.$$

被辗过的青蛙在任何时间都永远不会到达，所以 $R \subseteq A$，并且 $P(R \cap A) = P(R) = 0.59184$。因此

$$P(R \mid A) = \frac{0.59184}{0.6372} = \frac{59184}{63720} = \boxed{\frac{274}{295} \approx 0.929}.$$

这包括了已经被辗过的青蛙（在 $n = 1$ 或 $n = 2$ 时），以及仍在等候、其后在 $n = 3$ 时被辗过的青蛙，正如“在某个阶段”所要求的那样。

（有些读者把这个条件理解为：经过 $n = 0$ 和 $n = 1$ 两次观察后牠仍未到达，也就是在 $n = 2$ 那次察看之前。这种理解得出 $0.59184/(1 - 0.244) = \frac{137}{175} \approx 0.783$。我们较倾向采用上面的理解，因为恰好在 2 分钟时到达，也算是在牠开始“之后 2 分钟”到达。）

验算

- 青蛙的各种结果必须涵盖所有情况：在 $n = 1, 2, 3$ 时被辗过的概率分别为 $0.9(0.24)$、$0.54(0.48)$ 和 $0.162(0.72)$，即 $0.216 + 0.2592 + 0.11664 = 0.59184$，恰好等于 $1 - 0.40816$。
- 青蛙安全过路的概率远低于蟾蜍那必然的 1，对没有耐性的一方来说理应如此。
- 以分数作准确枚举，再以蒙地卡罗模拟（Monte Carlo simulation）模拟 10^6 对爬行动物，得出 0.4087、0.3234 和 0.9286，与 0.40816、0.32301 和 0.92881 吻合。

常见错误

- 让青蛙在 $n = 0$ 时冒险：按规则，那时 $n/3 = 0$。
- 忘记青蛙的过程在 $n = 3$ 时终止，于是像处理蟾蜍那样为牠求一个几何级数（geometric series）的和。
- 在最后一部分，分母用了 $P(\text{未能安全过路于} n \le 2)$，分子却只放进截至 $n = 2$ 为止被辗过的情况。题目问的是在任何阶段被辗过，包括 $n = 3$。

STEP 之外

青蛙的旅程是一条小型的马可夫链（*Markov chain*），带有吸收态（absorbing states）（“安全”和“被辗过”），而蟾蜍的等候时间服从几何分布，即无记忆（memoryless）的指数分布（exponential distribution）的离散版本。马可夫链的吸收概率（absorption probabilities）和首达时间（hitting times）是大学第一门概率课程的核心课题。Grimmett 与 Welsh 所著的 *Probability: An Introduction*（概率入门教科书）对两者都有详细阐述。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。