详细解答

STEP I 1991，第 14 题

概率与统计 · 三角形的计数

> **STEP I 1991，第 14 题**
>
> 继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：
>
> step.maths.org/questions/91-s1-q14

关键思路

三个长度 $a > b > c$ 能构成非退化三角形（non-degenerate triangle），当且仅当最长的一条严格短于其余两条之和，即 $b + c > a$；另外两个三角不等式（triangle inequality）自动成立。因此固定 a 之后，我们对每个 b 数出夹在 $a - b$ 与 b 之间的 c 值有多少个。这些数目每次递增 2，奇数（或偶数）之和正是由此而来。之后对所有可能的 a 求和，只需用到 $\sum k^2$ 的标准公式。

解答

三角形何时存在？

设 $a > b > c > 0$。非退化三角形须满足的三个三角不等式是

$$b + c > a, \qquad a + c > b, \qquad a + b > c.$$

后两个自动成立，因为 a 本身已经大于 b，也大于 c。所以三根棒能构成非退化三角形，当且仅当 $b + c > a$。（若 $b + c = a$，这个“三角形”是扁平的，面积为零，不计算在内。）

最长的棒长度为偶数

固定 a。我们需要整数 b, c 满足

$$a - b < c < b, \qquad b < a.$$

对于给定的 b，满足 $a - b + 1 \le c \le b - 1$ 的整数 c 共有

$$(b - 1) - (a - b + 1) + 1 = 2b - a - 1,$$

个，前提是这个数为正；否则一个也没有。（留意这里 $c \geq a-b+1 \geq 2$，所以 c 自动是一个真正的棒长。）

现在设 a 为偶数。那么 $2b-a-1$ 是奇数，而它至少为 1 的充要条件是 $b \geq \frac{a}{2}+1$。因此 b 由 $\frac{a}{2}+1$ 取到 $a-1$，得出

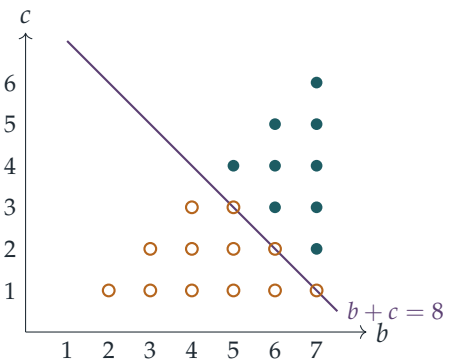
$$\begin{aligned} b = \tfrac{a}{2}+1: &\quad 2b-a-1 = 1, \\ b = \tfrac{a}{2}+2: &\quad 2b-a-1 = 3, \\ &\vdots \\ b = a-1: &\quad 2b-a-1 = a-3. \end{aligned}$$

b 每增加 1，数目便增加 2，所以以这根棒为最长边的三角形数目是

$$1+3+5+\cdots+(a-3),$$

正如题目所求。（当 $a=2$ 时这个和是空的，这是对的：没有三角形的最长边是 2。）首 k 个奇数之和是 k^2，而这里共有 $\frac{a-2}{2}$ 项，所以这个数目是 $(\frac{a-2}{2})^2$。

下图显示 $a=8$ 的情况：每一点代表一对 (b,c)，其中 $8>b>c$，而实心点是位于直线 $b+c=8$ 上方的那些点。各列分别有 1、3 和 5 个实心点。



最长的棒长度为奇数

现在设 a 为奇数。那么 $2b-a-1$ 是偶数，而它为正的充要条件是 $b \geq \frac{a+3}{2}$。当 b 由 $\frac{a+3}{2}$ 取到 $a-1$ 时，数目依次为 $2,4,\ldots,a-3$，所以三角形的数目是

$$2+4+6+\cdots+(a-3) = 2\left(1+2+\cdots+\tfrac{a-3}{2}\right) = \frac{a-3}{2}\cdot\frac{a-1}{2} = \frac{(a-1)(a-3)}{4}.$$

（同样，$a=3$ 时正确地得出 0。）

三角形的总数

最长的棒可以是 $3,4,\ldots,2N+1$ 中任何一个（更小的值反正只会得出零）。

偶数 $a=2m$，$m=1,\dots,N$：数目是 $(m-1)^2$，所以这部分合共贡献

$$\sum_{m=1}^{N}(m-1)^2=\sum_{k=1}^{N-1}k^2=\frac{(N-1)N(2N-1)}{6}.$$

奇数 $a=2m+1$，$m=1,\dots,N$：数目是 $\frac{(2m)(2m-2)}{4}=m(m-1)$，所以这部分合共贡献

$$\begin{aligned}\sum_{m=1}^{N}(m^2-m)&=\frac{N(N+1)(2N+1)}{6}-\frac{N(N+1)}{2}\\&=\frac{N(N+1)(2N-2)}{6}=\frac{(N-1)N(N+1)}{3}.\end{aligned}$$

两者相加，能构成非退化三角形的选法数目是

$$T_N=\frac{N(N-1)}{6}\big[(2N-1)+2(N+1)\big]=\frac{N(N-1)(4N+1)}{6}.$$

? **想一想** 为甚么要按 a 的奇偶性（parity）把和式分开，而不是对单一公式求和?

对于给定的 a，当 a 为偶数时数目是 $\frac{(a-2)^2}{4}$，但当 a 为奇数时却是 $\frac{(a-1)(a-3)}{4}=\frac{(a-2)^2-1}{4}$。这是两个不同的 a 的多项式（polynomial），所以写成 $a=2m$ 或 $a=2m+1$ 之后，两者各自变成 m 的简单多项式，可以用标准公式求和。

验证 $N=3$ 的情况

公式给出 $T_3=\frac{3\cdot2\cdot13}{6}=13$。以长度为 $1,\dots,7$ 的棒直接列举，把三角形写成 (a,b,c)：

- $a=4$（一个）：$(4,3,2)$；
- $a=5$（两个）：$(5,4,2),(5,4,3)$；
- $a=6$（四个）：$(6,4,3),(6,5,2),(6,5,3),(6,5,4)$；
- $a=7$（六个）：$(7,5,3),(7,5,4),(7,6,2),(7,6,3),$ $(7,6,4),(7,6,5)$。

合共 $1+2+4+6=13$ 个三角形，与公式吻合（亦与偶数 a 的 $1=1^2,4=2^2$ 及奇数 a 的 $2=2\cdot1,6=3\cdot2$ 吻合）。

概率

随机抽出三根棒而不放回（without replacement），$\binom{2N+1}{3}$ 种无序选法中每一种的可能性均等。由于

$$\binom{2N+1}{3}=\frac{(2N+1)(2N)(2N-1)}{6},$$

构成非退化三角形的概率（probability）是

$$\frac{T_N}{\binom{2N+1}{3}} = \frac{N(N-1)(4N+1)}{(2N+1)\,2N\,(2N-1)} = \frac{(N-1)(4N+1)}{2(4N^2-1)},$$

其中约去了因子 N，并用到 $(2N+1)(2N-1) = 4N^2 - 1$。这就是所求的结果。

验算

- 当 $N = 3$ 时，概率是 $\frac{2\cdot 13}{2\cdot 35} = \frac{13}{35}$，与 $\binom{7}{3} = 35$ 种选法中有 13 个三角形相符。
- 当 $N \to \infty$ 时，概率趋向 $\frac{4N^2}{8N^2} = \frac{1}{2}$。这与连续的版本一致：在 $[0,1]$ 上取三个独立的均匀分布长度，最长者小于其余两者之和的机会是 $\frac{1}{2}$。
- 对 N 由 2 至 29 的每个值，以穷举法（brute force）数遍所有三元组，结果与 T_N 及概率公式完全吻合。

常见错误

- 用了 $b + c \geq a$：等号成立时得到的是扁平三角形，题目已把它排除，于是每个数目都会偏大。
- 把三个三角不等式逐一分开检查，或者忘记了一旦 a 是最长的，就只有 $b + c > a$ 才起作用。
- 把 b 的范围算错一位；应以一个小例子检验，例如 $a = 6$（三角形为 $(6,4,3)$, $(6,5,2)$, $(6,5,3)$, $(6,5,4)$，即 $1 + 3$）。

STEP 之外

像图中那样数算区域内的格点（lattice point），是计算面积的离散版本；而当 N 增大时，这个数目除以 $\binom{2N+1}{3}$ 会趋近单位立方体内的一个体积比。这种由离散均匀分布（uniform distribution）过渡到连续均匀分布的做法，以及折棒问题（broken-stick problem）这类“几何概率”（geometric probability）题目，都是大学一年级的经典课题。想进一步阅读，Grimmett 与 Welsh 合著的 *Probability: An Introduction*（概率论入门）是个好去处。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。