详细解答

STEP I 1991，第 13 题

力学 · 动量守恒

> **STEP I 1991，第 13 题**
>
> 继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：
>
> step.maths.org/questions/91-s1-q13

关键思路

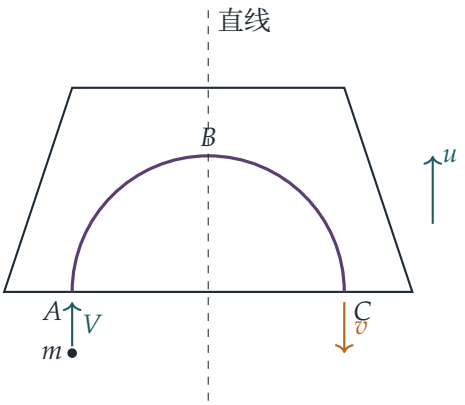
桌面光滑，凹槽也光滑，所以没有任何外力沿直线方向推动系统，也没有任何力作功。由此得到两条守恒定律：沿直线方向的动量（momentum）守恒，以及动能（kinetic energy）守恒。凹槽在出口处的切线与直线平行，所以在出口处两个速度都沿着直线，这时两条定律的用法就与一维弹性碰撞（elastic collision）完全一样。至于固定的薄片（lamina），平均力就是总冲量（impulse）除以所需时间。

关于题目用字，有一点要说明：题目说在 A 和 B 的切线与直线平行，但从图中可见，与直线平行的其实是两端 A 和 C 的切线（在 B 处凹槽与直线成直角）。我们采用 A 和 C，这显然才是题目的原意。

解答

可移动的薄片

把质点（particle）看成点质量，把薄片看成只能沿直线平移的刚体（rigid body），并假设所有接触面都是光滑的。取该直线为轴，以质点在 A 进入凹槽时的运动方向为正方向。



设质点离开 C 时沿直线的速度为 v（以 V 的方向为正），并设薄片此时沿直线的速度为 u。

想一想 为甚么质点在 C 的速度必定沿着直线?

相对于薄片，质点沿凹槽运动，所以它在 C 的相对速度（relative velocity）沿着该处的切线，而这条切线与直线平行。薄片本身只沿直线运动。两者相加，质点在 C 的实际速度同样沿着直线。因此在出口处，每个物体只需要用一个数来描述。

在运动过程中，系统（质点加薄片）所受的外力有两个：一是桌面的法向反作用力（normal reaction），方向垂直于桌面；二是令薄片保持在直线上的力，方向与直线垂直（直线是光滑的）。凹槽对质点的力与质点对凹槽的力都是内力，成对互相抵销。所以沿直线方向的动量守恒：

$$mV = mv + Mu. \tag{1}$$

所有接触面都是光滑的，而且桌面是水平的，所以没有作功，动能守恒。（凹槽的法向反作用力确实分别对质点和薄片作功，但这两个功互相抵销，因为反作用力垂直于相对速度。）所以

$$\tfrac{1}{2}mV^2 = \tfrac{1}{2}mv^2 + \tfrac{1}{2}Mu^2. \tag{2}$$

把 (1) 和 (2) 改写成

$$m(V-v) = Mu, \qquad m(V-v)(V+v) = Mu^2.$$

其中一个解是 $v = V$、$u = 0$：这是在 A 处、一切尚未发生时的情况。在 C 处，质点相对于薄片是向后运动的，所以 $v \neq V$ 而且 $u \neq 0$，于是可以把第二条方程除以第一条，得到

$$V + v = u.$$

（这表示质点相对于薄片的速率在两端都是 V，与弹性碰撞的情况一样。）把 $u = V + v$ 代入 (1)：

$$mV = mv + MV + Mv \quad\Longrightarrow\quad v = -\frac{M-m}{M+m}V, \qquad u = V + v = \frac{2m}{M+m}V.$$

由于 $m < M$，v 是负数：质点从 C 出来时，是沿着来时的方向往回走。所以当质点离开凹槽时，

$$\text{质点的速率} = \frac{M-m}{M+m}V, \qquad \text{薄片的速率} = \frac{2m}{M+m}V,$$

其中薄片沿质点原来的方向运动，质点则沿相反方向运动。

质点确实能够走完整条凹槽：假如它在某一点相对于薄片静止，它的速度就会与薄片相同，这时动能会是 $\frac{1}{2}(mV)^2/(M+m) < \frac{1}{2}mV^2$，与能量守恒矛盾。所以它的相对速率永远不会降至零。

固定不动的薄片

现在薄片不能移动。凹槽对质点的反作用力垂直于质点的速度，所以不作功，质点以恒定速率 V 走过半圆。半圆的长度是 πr，所以质点在凹槽内的时间是

$$T = \frac{\pi r}{V}.$$

质点的动量由向前的 mV 变为向后的 mV，所以薄片给予质点的总冲量是 $2mV$，方向沿直线向后。质点垂直于直线方向的动量在两端都是零，所以冲量的垂直分量是零。

根据牛顿第三定律（Newton's third law），质点给予薄片的冲量是 $2mV$，方向沿直线向前。薄片保持静止，所以栓钉（peg）必须提供相反的冲量，而薄片推向栓钉的总冲量就是 $2mV$，方向与质点原来的运动方向相同。（根据上一段，来自直线的任何横向推力，平均值都是零。）除以 T，栓钉所受的平均力是

$$\frac{2mV}{\pi r/V} = \frac{2mV^2}{\pi r},$$

方向与质点进入凹槽时的方向相同。（题目所说的“average force per unit time”（每单位时间的平均力）正是这个意思：每单位时间的冲量。）

我们也可以直接看出这个结果。质点需要一个指向圆心、大小为 mV^2/r 的力，所以它以 mV^2/r 的力向外推薄片。当连接质点的半径与 CA 所成的角为 θ 时（其中 θ 以均匀的速率由 0 增至 π），这个推力沿直线方向的分量是 $(mV^2/r)\sin\theta$，而 $\sin\theta$ 在 $[0,\pi]$ 上的平均值是 $2/\pi$。

验算

- 若 $M \to \infty$，薄片几乎不动：$u \to 0$，而质点的速率趋向 V，与凹槽固定时的情况一样。
- 若 $m = M$，质点出来时静止，而薄片取得它的全部速率 V，就像两个质量相等的物体之间的弹性碰撞。
- 取 $M = 3$、$m = 1$、$V = 2$：$v = -1$ 而 $u = 1$。动量：$1\cdot(-1) + 3\cdot 1 = 2 = mV$。能量：$\frac{1}{2} + \frac{3}{2} = 2 = \frac{1}{2}\cdot 1\cdot 2^2$。对运动方程作数值模拟（分别用半圆形凹槽和半椭圆形凹

槽），所得数值准确至小数点后六位都相同；而对固定薄片的 $(mV^2/r)\sin\theta$ 作数值积分，得到平均力为 $2mV^2/(\pi r)$，例如当 $m = 0.7$、$r = 1.3$、$V = 2.1$ 时是 1.5117。

常见错误

- 保留 $v = V$、$u = 0$ 这个根：它满足两条方程，但描述的是进入凹槽的一刻，而不是离开的一刻。
- 用了最大的力 mV^2/r，而不是沿直线方向的平均力；横向分量会互相抵销，而沿直线方向的分量只在 B 处才达到 mV^2/r。

STEP 之外

第一部分其实是一次隐藏的碰撞：不论凹槽是甚么形状，重要的只有守恒量和出口方向，这正是不必知道作用力、单凭守恒定律处理散射（scattering）问题背后的想法。在拉格朗日力学（Lagrangian mechanics）中，沿直线的坐标并不出现在拉格朗日量（Lagrangian）之中，所以它的共轭动量（conjugate momentum）自动守恒；这就是对称性与守恒定律之间的联系（诺特定理，Noether's theorem）的起点。Kleppner 与 Kolenkow 的 *An Introduction to Mechanics*（力学入门）正是以这种精神处理动量、冲量和碰撞。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。