详细解答

STEP I 1991，第 12 题

力学 · 涉及摩擦力的平衡

> **STEP I 1991，第 12 题**
>
> 继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：
>
> step.maths.org/questions/91-s1-q12

关键思路

木板 AB 是轻的，而且只在两端受力，两端都是光滑铰链（smooth hinge）。所以它施于 CD 的力必定沿 AB 方向。这样问题就简化为单一刚体（rigid body）CD，受三个未知的力作用。对 C 取力矩（taking moments）可求出 AB 中的推力（thrust），再分解力（resolving）便得到 C 处的摩擦力（friction）和法向反作用力（normal reaction）。几何关系（两块木板在 B 相接）把 x 与 α、β 联系起来，正因如此，l 和 x 才会在答案中消去。

解答

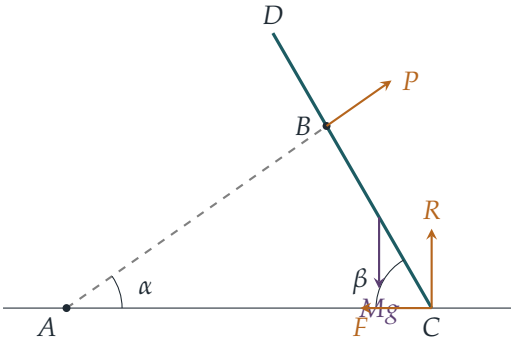
模型

我们把木板视为轻的刚性杆，把油漆工视为质量为 M 的质点（particle），并把 A 和 B 处的铰链视为光滑。地面在 C 处是粗糙的，摩擦系数（coefficient of friction）为 μ。

> ? **想一想** 为甚么两块木板之间在 B 处的力必定沿 AB 方向?

木板 AB 没有重量，作用在它上面的力只来自 A 和 B 处的光滑铰链。对 A 取力矩，B 处的力对 A 的力矩为零，所以它沿 BA 方向。于是 A 处的力必定与它大小相等、方向相反。根据牛顿第三定律（Newton's third law），AB 在 B 处以一个沿 AB 方向的力 P 推 CD。我们取 P 的方向为由 A 指向 B（即推力），而下面的计算会确认 $P > 0$。

因此作用在 CD 上的力有：B 处的推力 P，与水平线成仰角 α，方向背离 A；油漆工的重量 Mg，作用点沿木板距 C 为 x；以及 C 处向上的法向反作用力 R 和指向 A 的摩擦力 F。摩擦力必须指向 A，因为推力把 C 推离 A。



几何关系

点 B 是 AB 的顶端，所以它的高度是 $2l\sin\alpha$。它沿 CD 与 C 的距离又是 $2x$，所以它的高度也是 $2x\sin\beta$。因此

$$x\sin\beta = l\sin\alpha, \qquad \text{即} \qquad x = \frac{l\sin\alpha}{\sin\beta}.$$

水平距离 AC 是 AB 和 BC 的水平投影之和：

$$AC = 2l\cos\alpha + 2x\cos\beta.$$

对 CD 取力矩和分解力

对 C 取力矩。P 的作用线（line of action）就是直线 AB，它与 C 的垂直距离是 $AC\sin\alpha$。重量的作用线与 C 的水平距离是 $x\cos\beta$。两个力矩的转向相反，所以

$$P\cdot AC\sin\alpha = Mgx\cos\beta \quad\Longrightarrow\quad P = \frac{Mgx\cos\beta}{(2l\cos\alpha + 2x\cos\beta)\sin\alpha} > 0.$$

沿水平和铅垂方向分解力：

$$F = P\cos\alpha, \qquad R = Mg - P\sin\alpha.$$

代入 P，

$$R = Mg\left(1 - \frac{x\cos\beta}{2l\cos\alpha + 2x\cos\beta}\right) = Mg\,\frac{2l\cos\alpha + x\cos\beta}{2l\cos\alpha + 2x\cos\beta},$$
$$F = Mg\,\frac{x\cos\beta\cos\alpha}{(2l\cos\alpha + 2x\cos\beta)\sin\alpha}.$$

特别地，$R > 0$，所以 C 端一直与地面保持接触。两式相除，

$$\frac{F}{R} = \frac{x\cos\alpha\cos\beta}{\sin\alpha\,(2l\cos\alpha + x\cos\beta)}.$$

现在运用几何关系 $x = l\sin\alpha/\sin\beta$。于是 $x\cos\beta = l\sin\alpha\cot\beta$，而

$$\frac{F}{R} = \frac{l\sin\alpha\cot\beta\cos\alpha}{\sin\alpha\,(2l\cos\alpha + l\sin\alpha\cot\beta)} = \frac{\cos\alpha\cot\beta}{2\cos\alpha + \sin\alpha\cot\beta} = \frac{\cot\alpha\cot\beta}{2\cot\alpha + \cot\beta},$$

其中最后一步把分子和分母同除以 $\sin\alpha$。

木板 CD 只有在摩擦力足以提供这个力时才处于平衡（equilibrium），即 $F \le \mu R$。由于 $R > 0$，这就是

$$\mu \ge \frac{\cot\alpha\cot\beta}{2\cot\alpha + \cot\beta},$$

正是所求。（木板 AB 在 A 处以铰链固定，所以无论它需要多大的力，都能保持不动。）

最后部分

若 B 与 D 重合，则 $2x = 2l$，所以 $x = l$。由几何关系得 $\sin\beta = \sin\alpha$，而两个角都是锐角，所以 $\beta = \alpha$。两块木板与地面构成一个等腰三角形，其中 $AC = 4l\cos\alpha$。摩擦条件变成

$$\mu \ge \frac{\cot^2\alpha}{3\cot\alpha} = \tfrac{1}{3}\cot\alpha, \qquad \text{即} \qquad \tan\alpha \ge \frac{1}{3\mu}.$$

所以当且仅当 $\alpha \ge \alpha_0$ 时才可能平衡，其中 $\tan\alpha_0 = 1/(3\mu)$。

想一想 油漆工在哪里？当 α 变化时，距离朝哪个方向改变？

油漆工站在 CD 的中点，与 C 的距离为 l。以 A 为原点，C 位于 $(4l\cos\alpha, 0)$，而油漆工位于

$$(4l\cos\alpha - l\cos\alpha,\ l\sin\alpha) = (3l\cos\alpha,\ l\sin\alpha).$$

所以油漆工与 A 的距离的平方是

$$d^2 = 9l^2\cos^2\alpha + l^2\sin^2\alpha = l^2\left(1 + 8\cos^2\alpha\right).$$

在 $(0, \frac{\pi}{2})$ 上，这个量随 α 增大而减小。所以最大距离出现在容许的最小角度 $\alpha = \alpha_0$。这时 $\tan\alpha_0 = 1/(3\mu)$，所以

$$\cos^2\alpha_0 = \frac{1}{1 + \tan^2\alpha_0} = \frac{9\mu^2}{1 + 9\mu^2},$$

而

$$d_{\max}^2 = l^2\left(1 + \frac{72\mu^2}{1 + 9\mu^2}\right) = l^2\,\frac{1 + 81\mu^2}{1 + 9\mu^2}.$$

因此油漆工与 A 的最大距离是

$$l\sqrt{\frac{1 + 81\mu^2}{1 + 9\mu^2}},$$

正是所求。这个值是可以达到的，这时摩擦力刚好处于极限状态（limiting friction）。

验算

- 最终答案的极限情况：当 $\mu \to 0$ 时，距离趋向 l，对应 $\alpha \to \frac{\pi}{2}$，两块木板都竖直。当 $\mu \to \infty$ 时，距离趋向 $3l$，对应两块木板平放在地上，油漆工位于 $(3l, 0)$。两者都合理。
- 若 $\beta \to \frac{\pi}{2}$，即 CD 竖直，则 $\cot\beta \to 0$，所需的 μ 趋向 0。竖直的木板不需要摩擦力，与此吻合。
- 数值验算：取 $\alpha = 60^\circ$ 和 $\beta = 70^\circ$，直接解 CD 的三条平衡方程，得 $F/R = 0.13837$，与公式相符。取 $\mu = 0.5$，对 α 逐一扫描，得最大距离为 $2.55704\,l$，而公式给出 $l\sqrt{21.25/3.25} = 2.55704\,l$。

常见错误

- 假设 B 处的力是水平或铅垂的。由于 AB 是轻的，而且两端都以光滑铰链连接，这个力必定沿 AB 方向。
- 在 R 中漏掉推力的铅垂分量。这个分量会减小法向反作用力，令所需的摩擦力更难提供。
- 在最后部分，对所有 α 求最大值，而不是只对可能平衡的角度求最大值。

STEP 之外

两端以光滑销钉连接的轻杆称为*二力构件*（two-force member）。辨认出这类构件，是工程静力学中分析销接框架（桁架，truss）的第一步，其中每一根这样的构件只承受纯拉力或纯推力。最后部分是一个小型的约束优化（constrained optimisation）问题：目标函数是单调的，所以最优值落在可行集（feasible set）的边界上。这个主题在线性规划（linear programming）和优化理论中反复出现。想进一步了解刚体的平衡，可参阅 Kleppner and Kolenkow, *An Introduction to Mechanics*（力学入门教科书）。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。