详细解答

STEP I 1991，第 11 题

力学 · 滑轮与冲量

> **STEP I 1991，第 11 题**
>
> 继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：
>
> step.maths.org/questions/91-s1-q11

关键思路

每个循环分为两个阶段。重锤撞上桩时会立即停下，绳子随之松弛，于是平衡锤向上飞起，再在重力作用下自由落回原处。接着绳子猛然拉紧，两个质量分享动量，然后以第一部分求得的恒定加速度一起运动，直到重锤再次落在桩上。恒定加速度令每个阶段在时间上都对称。因此，一个循环中的每个速率，都是上一个循环中对应速率的固定倍数，等比数列（geometric progression）便随即出现。

解答

恒定加速度

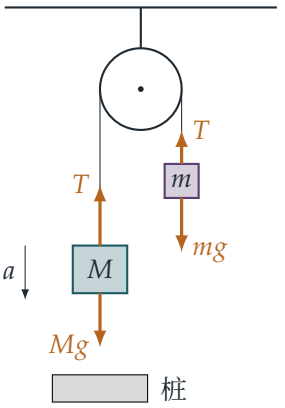
我们把重锤和平衡锤视为质点（particle），并假设绳子轻而不可伸长（light and inextensible），绕过一个光滑的轻滑轮（pulley）。绳子拉紧时，两个质点以相同的速率 v 运动，重锤向下，平衡锤向上。设它们由静止开始移动了距离 x 之后，速率为 v。重锤失去了势能（potential energy）Mgx，平衡锤则增加了 mgx。滑轮光滑，绳子轻而不可伸长，所以没有能量损失，于是

$$\tfrac{1}{2}(M+m)v^2 = (M-m)gx.$$

对时间求导，并利用 $\dot{x} = v$，

$$(M+m)v\dot{v} = (M-m)gv \quad \Longrightarrow \quad \dot{v} = g\,\frac{M-m}{M+m}$$

其中 $v \neq 0$。这是一个常数，记为 a。用牛顿第二定律（Newton's second law）也可得到同样的结果：设 T 为张力（tension），则 $Mg - T = Ma$ 及 $T - mg = ma$，两式相加得 $(M-m)g = (M+m)a$。



从一次碰撞到下一次碰撞

在碰撞前的一刻，重锤以速率 v 向下运动，平衡锤则以相同的速率 v 向上运动。我们分三个阶段追踪这个运动。

撞击。碰撞是完全非弹性（completely inelastic）的，而桩固定不动，所以重锤停下。平衡锤仍以速率 v 向上运动，所以绳子松弛。这时张力帮不了平衡锤，而重锤只受重力作用，被压在桩上，所以重锤留在原处。

自由飞行。绳子松弛时，平衡锤是一个沿铅垂方向运动的抛体（projectile）。它上升后再回到绳子重新拉紧的位置，也就是撞击时它所在的位置。在恒定加速度 g 之下，运动是对称的，所以它回到该处时以速率 v 向下运动，所需时间为

$$\frac{2v}{g}.$$

猛拉。绳子猛然拉紧时，平衡锤以 v 向下运动，重锤则静止。此后两个质量必须以共同的速率 u 运动，平衡锤向下，重锤向上。根据题目容许的假设，平衡锤失去的动量（momentum）等于重锤得到的动量：

$$m(v-u) = Mu \quad \Longrightarrow \quad u = \frac{mv}{M+m}.$$

想一想 为甚么这里不能直接对整个系统使用动量守恒（conservation of momentum）？

两个质量沿相反方向运动，而滑轮又施加了冲量（impulse），所以并不存在一个总动量守恒的方向。真正成立的是：由于绳子是轻的、滑轮是光滑的，冲击张力（impulsive tension）对两个质量的大小同为 J。因此平衡锤沿绳子失去动量 J，重锤沿绳子得到动量 J。这正是题目容许我们假设的那句话。

再次一起运动。现在绳子拉紧，重锤以速率 u 向上运动。根据第一部分，加速度的大小

恒为 a，方向是令较重的质量 M 向下。所以重锤减速至静止，然后落回桩上。恒定加速度令这段运动同样对称：重锤以速率 u 到达桩，所需时间为

$$\frac{2u}{a}.$$

所以在下一次碰撞前的一刻，平衡锤的速率为

$$u = \frac{mv}{M+m},$$

正如所求。

各段时间构成等比数列

记 $k = \dfrac{m}{M+m}$，则 $0 < k < 1$。设 v_0 为第一次撞击前一刻的速率。根据上一部分，第 $(n+1)$ 次撞击前一刻的速率为 $v_n = k^n v_0$。把两个阶段相加，从第 $(n+1)$ 次撞击到下一次撞击的时间为

$$t_n = \frac{2v_n}{g} + \frac{2kv_n}{a} = \left(\frac{2}{g} + \frac{2k}{a}\right) k^n v_0.$$

这是一个常数乘以 k^n，所以相继两次碰撞之间的时间构成等比数列，公比（common ratio）为 $k = m/(M+m)$。

总时间

设 T_0 为从释放到第一次撞击的时间。重锤由静止开始以加速度 a 运动，所以 $v_0 = aT_0$。由于 $0 < k < 1$，这个等比级数（geometric series）收敛（converges），总时间为

$$T_0 + \sum_{n=0}^{\infty} t_n = T_0 + \left(\frac{2}{g} + \frac{2k}{a}\right) \frac{v_0}{1-k}.$$

现在 $1 - k = \dfrac{M}{M+m}$，而 $\dfrac{k}{a} = \dfrac{m}{M+m} \cdot \dfrac{M+m}{g(M-m)} = \dfrac{m}{g(M-m)}$。因此

$$\frac{2}{g} + \frac{2k}{a} = \frac{2}{g}\left(1 + \frac{m}{M-m}\right) = \frac{2M}{g(M-m)},$$

$$\left(\frac{2}{g} + \frac{2k}{a}\right) \frac{v_0}{1-k} = \frac{2M}{g(M-m)} \cdot \frac{M+m}{M} v_0 = \frac{2v_0}{a} = 2T_0.$$

所以碰撞有无限多次，但总共只需有限的时间。重锤最终静止下来所需的时间为

$$T_0 + 2T_0 = 3T_0,$$

即从开始到第一次撞击所需时间的三倍。

验算

- 取极限 $m \to 0$。这时 $k \to 0$ 而 $a \to g$，所以重锤在第一次撞击后不再被提起。余下的时间只有平衡锤的飞行时间 $2v_0/g = 2gT_0/g = 2T_0$，总时间为 $3T_0$，与一般公式所预测的一致。
- 我们以随机的 M、m 和下落高度，用数值方法逐步计算这个运动（例如 $M = 2.403$，$m = 1.571$，故 $k = 0.3953$）。速率之比和时间间隔之比都是 0.3953，而总时间（包括等比级数的尾部）则为 $2.99998\,T_0$。

常见错误

- 忘记了自由飞行的阶段。撞击之后平衡锤继续向上运动，循环中包括它作为抛体所花的时间 $2v/g$。
- 在绳子松弛的阶段用了 a 而不是 g。绳子一旦松弛，平衡锤便只受重力作用。
- 在猛拉的一刻写“总动量守恒”，却把两个速度当作同一方向。滑轮改变了绳子的方向，所以双方分享的是*沿绳子方向*的动量。

STEP 之外

像这部打桩机或一个弹跳的球那样,在有限时间内发生无限多个事件,称为芝诺现象(Zeno behaviour)。这类现象出现在混合系统（hybrid systems）的理论中，当中平滑的运动会被突然的跳跃打断。绳子的猛拉是一个简单的冲击约束（impulsive constraint）。大学一年级的拉格朗日力学（Lagrangian mechanics）会有系统地处理这类约束。想进一步了解冲量、碰撞和受约束运动，可参阅 Kleppner 与 Kolenkow 的 *An Introduction to Mechanics*（力学入门）。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。