详细解答

STEP I 1991，第 10 题

力学 · 悬链的平衡

STEP I 1991，第 10 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/91-s1-q10

本题在 *Beyond STEP* 第 11.14 节是抛物线，不是悬链线中有完整的引导式讲解：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/ch11/bridge-parabola.html

关键思路

链上每一个接点都在三个力的作用下处于平衡（equilibrium）：相邻两节链的张力（tension），以及挂在该接点上的重量 w。沿水平方向分解力（resolving），可知每一节链的张力都有相同的水平分量。再沿竖直方向分解，可知每经过一个接点，竖直分量恰好减少 w；由于水平间距固定，各节链的斜率便构成一个等差数列（arithmetic progression）。斜率成等差数列，正是抛物线（parabola）在离散情况下的标记。

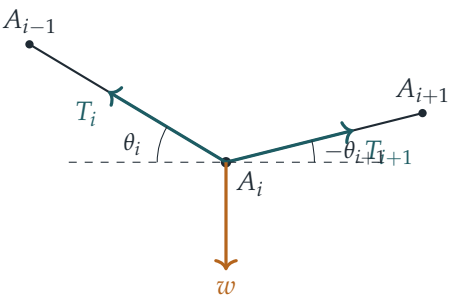
解答

平衡方程

把链视为轻、柔软而且不可伸长（light, flexible and inextensible）的模型，因此每一节链 $A_{i-1}A_i$ 的张力都沿着该节链的方向。设 θ_i 为 $A_{i-1}A_i$ 与水平线所成的角，沿 x 增加的方向向下量度，所以

$$\tan\theta_i = \frac{y_{i-1} - y_i}{h}.$$

（在桥的右半边，θ_i 是负数；以下的论证全都不受其正负号影响。）接点 A_i 受三个力作用：沿 A_iA_{i-1} 方向的 T_i、沿 A_iA_{i+1} 方向的 T_{i+1}，以及吊杆向下的拉力 w。



在 A_i 沿水平和竖直方向分解力，对 $1 \le i \le n+1$（其实对所有 $1 \le i \le 2n+1$ 都成立）：

$$T_i \cos\theta_i = T_{i+1}\cos\theta_{i+1},$$
$$T_i \sin\theta_i - T_{i+1}\sin\theta_{i+1} = w.$$

这就是题目要求的方程。

各个比

第一条方程说明 $T_i\cos\theta_i$ 对每一节链都相同；把这个共同的水平分量记作 H。它是正数，因为链只能拉、不能推。把第二条方程除以 H，并利用 $\tan\theta_i = (y_{i-1}-y_i)/h$，得

$$\frac{H}{h}(y_{i-1}-y_i) - \frac{H}{h}(y_i - y_{i+1}) = w.$$

因此，若以 $V_i = H(y_{i-1}-y_i)/h$ 表示第 i 节链张力的竖直分量，则

$$V_i - V_{i+1} = w \quad (1 \le i \le 2n+1), \qquad \text{所以} \qquad V_i = V_1 - (i-1)w \quad (1 \le i \le 2n+2).$$

想一想 现在只剩下一个未知数 V_1。桥的哪一项条件可以把它确定下来?

两个支点的高度相同。把整条链上各节的下降量加起来，

$$\begin{aligned} 0 = y_0 - y_{2n+2} &= \sum_{i=1}^{2n+2}(y_{i-1}-y_i) = \frac{h}{H}\sum_{i=1}^{2n+2} V_i \\ &= \frac{h}{H}\Big[(2n+2)V_1 - w\big(0+1+\cdots+(2n+1)\big)\Big]. \end{aligned}$$

方括号内的式子是 $(2n+2)V_1 - w(2n+1)(n+1)$，所以 $V_1 = \frac{1}{2}(2n+1)w$。（整体的竖直平衡也指向同一结果：两个支点平均分担总负载 $(2n+1)w$。）因此

$$V_i = \tfrac{1}{2}(2n+3-2i)\,w, \qquad \text{即} \qquad y_{i-1}-y_i = \frac{(2n+3-2i)\,wh}{2H}.$$

取 $i = n+1, n, \ldots, 1$，得到的下降量依次是 $wh/(2H)$ 的 $1, 3, \ldots, 2n+1$ 倍：

$$\frac{h}{y_n - y_{n+1}} = \frac{3h}{y_{n-1}-y_n} = \cdots = \frac{(2n+1)h}{y_0 - y_1} = \frac{2H}{w},$$

这就是所要求的一连串等式。（试卷上最后一个分子印作 $(2n+1)y$；它必定是 $(2n+1)h$，这既符合前面各项的规律，也只有这样，该比才会像其他各个比一样是无量纲的。）

抛物线

设 $k = wh/(2H)$。从 A_0 起把下降量加起来，

$$y_i = y_0 - k\sum_{j=1}^{i}(2n+3-2j) = y_0 - k\big[(2n+3)i - i(i+1)\big] = y_0 - k\,i\,(2n+2-i).$$

记 $m = n+1$，则 $i(2m-i) = m^2 - (i-m)^2$，所以

$$y_i = (y_0 - km^2) + k(i-m)^2 = y_{n+1} + k(i-n-1)^2,$$

这是因为代入 $i = m$ 可知 $y_0 - km^2 = y_{n+1}$。现在 $x_i = x_0 + ih$，所以 $(i-n-1)h = x_i - x_{n+1}$，于是每一点 A_i（$0 \le i \le 2n+2$）都满足

$$y = y_{n+1} + \frac{w}{2Hh}\,(x - x_{n+1})^2.$$

这是同一条抛物线，其竖直的对称轴通过最低点 A_{n+1}，所以 $A_0, A_1, \ldots, A_{2n+2}$ 各点全都在这条抛物线上。两个端点也包括在内：$i = 0$ 和 $i = 2n+2$ 都给出 y_0，正如所料。

验算

- 当 $n = 0$ 时，只有正中间的一根吊杆：公式给出 $V_1 = \frac{1}{2}w$，即链的每一半各承担一半负载，这显然是应有的结果。
- 这个结果与连续的情况吻合：一条水平张力为 H 的缆索，挂上每单位水平长度为 w/h 的均匀负载，会有 $y'' = (w/h)/H$，而我们的抛物线正有 $y'' = w/(Hh)$。
- 我们做了一次数值检验：随机选取 200 座桥（$1 \le n \le 8$，H、w、h 随机选取），以精确分数把各接点的方程当作线性方程组直接求解，并确认了各个比、公式 $y_i = y_0 - k\,i(2n+2-i)$、抛物线，以及每个接点上完整的力平衡。例如当 $n = 2$、$w = 2$、$H = 5$、$h = 1$ 时，下行一段的下降量依次为 1.0, 0.6, 0.2，而每个比都等于 $2H/w = 5$。

常见错误

- 不加说明便以对称为由断言 $y_n = y_{n+2}$。这是对的，但它是由两个支点等高推出来的；上面的求和论证是把它证明出来，而不是假设它成立。
- 忘记张力的水平分量是常数，而尝试逐一求出每个 T_i。本题从头到尾都不需要 T_i 本身（它们等于 $\sqrt{H^2 + V_i^2}$）。

- 在链上升的那一半弄错 θ_i 的正负号。全程使用 $\tan\theta_i = (y_{i-1} - y_i)/h$ 便可避免这个问题。

STEP 之外

只受自身重量而悬垂的链会形成悬链线（catenary）$y = c\cosh(x/c)$；但若链所承受的负载是沿水平方向均匀分布的，例如桥面，则会形成抛物线。本题正是这个事实的离散版本。二阶差分方程 $y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1} =$ 常数 是 $y'' =$ 常数 的有限差分（finite difference）形式，而微分方程（differential equations）的数值方法也建基于同一想法。变分法（calculus of variations）处理的正是悬链线及与之相关的曲线。Kleppner 与 Kolenkow 合著的 *An Introduction to Mechanics*（力学入门教科书）对绳和缆索的静力学有严谨细致的处理，很值得一读。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。