详细解答

STEP I 1991，第 1 题

纯数学 · 三角恒等式

> **STEP I 1991，第 1 题**
>
> 继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：
>
> step.maths.org/questions/91-s1-q1

关键思路

角度所满足的条件让我们可以消去其中一个角：由于 $\psi = \frac{1}{2}\pi - (\theta + \phi)$，我们有 $\sin\psi = \cos(\theta + \phi)$，于是该恒等式（identity）便成为一个关于两个自由角的命题。其后，乘积 $\sin\theta\sin\phi$ 与 $\cos(\theta + \phi)$ 结合起来得出 $\cos(\theta - \phi)$，而乘积 $\cos(\theta + \phi)\cos(\theta - \phi)$ 的形式十分简洁。至于第二部分，所选的特殊角令 ψ 等于 θ 的一半，有关 $\frac{1}{10}\pi$ 的资料正是由此而来。

解答

恒等式

由于 $\theta + \phi + \psi = \frac{1}{2}\pi$,

$$\sin\psi = \sin(\tfrac{1}{2}\pi - (\theta + \phi)) = \cos(\theta + \phi).$$

因此恒等式的左方是

$$L = \sin^2\theta + \sin^2\phi + \cos(\theta + \phi)[\cos(\theta + \phi) + 2\sin\theta\sin\phi].$$

在括号之内，$\cos(\theta + \phi) = \cos\theta\cos\phi - \sin\theta\sin\phi$，所以

$$\cos(\theta + \phi) + 2\sin\theta\sin\phi = \cos\theta\cos\phi + \sin\theta\sin\phi = \cos(\theta - \phi).$$

现在我们需要乘积 $\cos(\theta+\phi)\cos(\theta-\phi)$。把复角公式（compound-angle formulae）乘开，

$$\begin{aligned}\cos(\theta+\phi)\cos(\theta-\phi) &= (\cos\theta\cos\phi-\sin\theta\sin\phi)(\cos\theta\cos\phi+\sin\theta\sin\phi)\\ &= \cos^2\theta\cos^2\phi-\sin^2\theta\sin^2\phi\\ &= \cos^2\theta\,(1-\sin^2\phi)-(1-\cos^2\theta)\sin^2\phi\\ &= \cos^2\theta-\sin^2\phi.\end{aligned}$$

因此

$$L=\sin^2\theta+\sin^2\phi+\cos^2\theta-\sin^2\phi=\sin^2\theta+\cos^2\theta=1,$$

这就是所需的恒等式。

$\sin\frac{1}{10}\pi$ 所满足的三次方程

取 $\theta=\phi=\frac{1}{5}\pi$。那么 $\psi=\frac{1}{2}\pi-\frac{2}{5}\pi=\frac{1}{10}\pi$。设

$$x=\sin\tfrac{1}{10}\pi,\qquad s=\sin\tfrac{1}{5}\pi.$$

由恒等式得

$$2s^2+x^2+2s^2x=1,\qquad \text{即}\qquad 2s^2(1+x)=1-x^2. \tag{$*$}$$

> **想一想** 为甚么不直接利用 $\sin\psi=\cos 2\theta=1-2s^2$ 来消去 s?

这个关系式对每一个满足 $\psi=\frac{1}{2}\pi-2\theta$ 的 θ 都成立，所以把 $s^2=\frac{1}{2}(1-x)$ 代入 $(*)$ 只会得出 $(1-x)(1+x)=1-x^2$：这是对的，却毫无内容。我们必须用上 $\frac{1}{5}\pi$ 的某种特殊性质。这个特殊之处就是 $\frac{1}{5}\pi=2\cdot\frac{1}{10}\pi$，所以 $\theta=2\psi$，而二倍角公式（double-angle formula）把 s 与 x 联系起来：

$$s=\sin 2\psi=2\sin\psi\cos\psi,\qquad \text{所以}\qquad s^2=4x^2(1-x^2).$$

把这个结果代入 $(*)$，

$$8x^2(1-x^2)(1+x)=1-x^2.$$

由于 $0<\frac{1}{10}\pi<\frac{1}{2}\pi$，我们有 $0<x<1$，所以 $1-x^2\neq 0$，可以把它约去：

$$8x^2(1+x)=1,\qquad \text{即}\qquad 8x^3+8x^2-1=0.$$

所以 $\sin\frac{1}{10}\pi$ 满足题目给出的三次方程（cubic），证明完毕。

验算

恒等式可以用 $\theta = \frac{1}{2}\pi$、$\phi = \psi = 0$ 来检验：左方是 $1+0+0+0 = 1$。取 $\theta = \phi = \psi = \frac{1}{6}\pi$ 时，左方是 $3 \cdot \frac{1}{4} + 2 \cdot \frac{1}{8} = 1$。

至于三次方程，$\sin\frac{1}{10}\pi = \sin 18^\circ \approx 0.309017$，而 $8x^3 + 8x^2 - 1$ 在该处的值在舍入误差范围内等于 0。事实上，这个三次式可以因式分解为 $(2x+1)(4x^2+2x-1)$，其根为 $-\frac{1}{2}$ 和 $\frac{1}{4}(-1 \pm \sqrt{5})$，而 $\frac{1}{4}(\sqrt{5}-1) \approx 0.309017$ 正是大家熟悉的 $\sin 18^\circ$ 的准确值。

常见错误

- 只用 $\sin\psi = \cos 2\theta$ 来消去 s，结果得到恒等式 $0 = 0$；见上面的方框。
- 除以 $1 - x^2$ 却没有说明它为何不等于零。这里 $x = \sin\frac{1}{10}\pi$ 严格介乎 0 与 1 之间。

STEP 之外

三次方程的另外两个根并非偶然：$-\frac{1}{2} = \sin\left(-\frac{1}{6}\pi\right)$，而 $\frac{1}{4}(-1-\sqrt{5}) = -\sin\frac{3}{10}\pi$。这类方程记录了 sin 和 cos 在 π 的有理数倍处的取值之间的代数关系，而要理解这些关系，最好的途径是单位根（roots of unity）：$\cos\frac{1}{5}\pi$ 与五次单位根，即 $z^5 = 1$ 的解，有密切的关系。这就是为甚么以直尺和圆规作正五边形，归根究柢取决于 $\sqrt{5}$。Needham 的 *Visual Complex Analysis*（《复分析：可视化方法》）是从几何角度认识这些想法的绝佳读物。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。