详细解答

STEP III 1990，第 9 题

纯数学 · 双曲函数

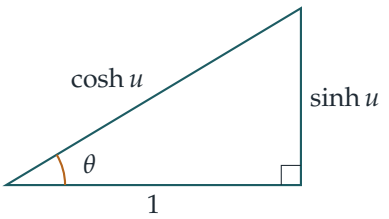
STEP III 1990，第 9 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/90-s3-q9

关键思路

关系式 $\tan\theta = \sinh u$ 等同于 $\sec^2\theta = 1 + \sinh^2 u = \cosh^2 u$，因此两个变量的三角函数（trigonometric functions）与双曲函数（hyperbolic functions）完全对应：$\cos\theta = \operatorname{sech} u$、$\sin\theta = \tanh u$、$\sec\theta = \cosh u$。画一个边长为 1、$\sinh u$ 和 $\cosh u$ 的直角三角形，这些关系便一目了然。有了这本“字典”，每一部分都只需先做一次简短的求导，再把结果翻译回来。



解答

在整个解答中，由于 $0 \le \theta < \frac{1}{2}\pi$，我们有 $\tan\theta \ge 0$，所以 $\sinh u \ge 0$ 且 $u \ge 0$。此外 $\cos\theta > 0$ 且 $\cosh u > 0$。

第 (i) 部分

利用 $1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta$ 和 $1 + \sinh^2 u = \cosh^2 u$，

$$\sec^2\theta = 1 + \tan^2\theta = 1 + \sinh^2 u = \cosh^2 u.$$

$\sec\theta$ 和 $\cosh u$ 均为正数，所以 $\sec\theta = \cosh u$，即 $\cos\theta = \operatorname{sech} u = v$，这正是所要证明的结果。

值得顺带记下与之配对的结果：$\sin\theta = \tan\theta\cos\theta = \sinh u \operatorname{sech} u = \tanh u$。

第 (ii) 部分

把 $\tan\theta = \sinh u$ 对 u 求导（利用链式法则（chain rule）作隐函数求导（implicit differentiation)），

$$\sec^2\theta\,\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}u} = \cosh u \quad\Longrightarrow\quad \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}u} = \cosh u\cos^2\theta = \cosh u\operatorname{sech}^2 u = \operatorname{sech} u = v,$$

其中 $\cos\theta$ 的表达式来自第 (i) 部分。

第 (iii) 部分

由于 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}\cosh u = \sinh u$，

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}u} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}(\cosh u)^{-1} = -\frac{\sinh u}{\cosh^2 u} = -\operatorname{sech} u\tanh u.$$

查一查字典，$\operatorname{sech} u\tanh u = \cos\theta\sin\theta = \frac{1}{2}\sin 2\theta$，所以

$$\sin 2\theta = -2\,\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}u}.$$

至于二阶导数（second derivative），可运用积法则（product rule），并配合 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}\tanh u = \operatorname{sech}^2 u$：

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}^2v}{\mathrm{d}u^2} &= -\Big[(-\operatorname{sech} u\tanh u)\tanh u + \operatorname{sech} u\cdot\operatorname{sech}^2 u\Big]\\ &= \operatorname{sech} u(\tanh^2 u - \operatorname{sech}^2 u).\end{aligned}$$

乘以 $-\cosh u$ 便可消去 $\operatorname{sech} u$：

$$-\cosh u\,\frac{\mathrm{d}^2v}{\mathrm{d}u^2} = \operatorname{sech}^2 u - \tanh^2 u = \cos^2\theta - \sin^2\theta = \cos 2\theta,$$

这就是第二个结果。

第 (iv) 部分

现在把 u 和 v 看成 θ 的函数。由第 (i) 部分，$v = \cos\theta$ 且 $\cosh u = \sec\theta$；而第 (ii) 部分给出 $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\theta} = 1\big/\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}u} = 1/v$（因为 $v > 0$，此式成立）。所以

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\theta} = \sec\theta, \qquad \frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}\theta^2} = \sec\theta\tan\theta,$$
$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}\theta} = -\sin\theta, \qquad \frac{\mathrm{d}^2v}{\mathrm{d}\theta^2} = -\cos\theta.$$

想一想 在埋头苦算之前，先想一想：第 (iv) 部分的恒等式，照试卷上所印的样子看来完全正确吗？

并不正确。按试卷所印，第一项含有 $\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}\theta^2}$，于是左方为

$$\begin{aligned}\sec\theta\cdot\sec\theta\tan\theta-\sin\theta\sec\theta\tan\theta+\sec^2\theta&=\sec^2\theta\tan\theta+(\sec^2\theta-\tan^2\theta)\\&=\sec^2\theta\tan\theta+1\ \geq 1,\end{aligned}$$

它永远不会等于零。题目原意的恒等式（identity），第一项应为 $\frac{\mathrm{d}^2v}{\mathrm{d}\theta^2}$（把 v 误印成 u）：

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\theta}\frac{\mathrm{d}^2v}{\mathrm{d}\theta^2}+\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}\theta}\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}\theta^2}+\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\theta}\right)^2=0.$$

代入上述四个导数，

$$\sec\theta(-\cos\theta)+(-\sin\theta)\sec\theta\tan\theta+\sec^2\theta=-1-\tan^2\theta+\sec^2\theta=0,$$

因为 $\sec^2\theta=1+\tan^2\theta$。这就证明了修正后的结果。

还有一个更简洁的看法：根据积法则，首两项合起来就是 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\theta}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}\theta}\right)$，而 $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\theta}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}\theta}=-\sec\theta\sin\theta=-\tan\theta$，其导数为 $-\sec^2\theta=-\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\theta}\right)^2$。

验算

取 $u=\ln 2$，则 $\sinh u=\frac{3}{4}$、$\cosh u=\frac{5}{4}$ 且 $\tan\theta=\frac{3}{4}$：由 3–4–5 三角形可得 $\cos\theta=\frac{4}{5}=\operatorname{sech}u$ 及 $\sin 2\theta=\frac{24}{25}$，而 $-2\,\mathrm{d}v/\mathrm{d}u=2\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{3}{5}=\frac{24}{25}$。数值方面，在 2000 个随机点上以有限差分（finite difference）计算的导数，与 (i)–(iii) 及修正后的 (iv) 吻合，误差约为 10^{-7}，并确认试卷所印的 (iv) 左方等于 $1+\sec^2\theta\tan\theta$。

常见错误

- 写出 $\cos\theta=\pm\operatorname{sech}u$ 却没有说明为何应取正号：决定正负号的是范围 $0\leq\theta<\frac{1}{2}\pi$。
- 忘记 $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\theta}$ 只不过是 $\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}u}$ 的倒数，反而从头对 $\operatorname{arsinh}(\tan\theta)$ 求导。

STEP 之外

函数 $\theta(u)=\arctan(\sinh u)$ 称为*古德曼函数*（Gudermannian function），它毋须借助复数（complex numbers）便把圆函数与双曲函数联系起来；其反函数（inverse function）$u=\ln(\sec\theta+\tan\theta)=\int_0^\theta\sec t\,\mathrm{d}t$ 正好是麦卡托（Mercator）地图上的纵坐标。当你写下

$\cosh(\mathrm{i}x) = \cos x$ 时，同样的配对也会出现；Needham 的 *Visual Complex Analysis*（《可视化复分析》）是从几何角度欣赏这些联系的绝佳读物。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。