详细解答

# STEP III 1990，第 8 题

纯数学 · 恰当微分方程

> **STEP III 1990，第 8 题**
>
> 继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：
>
> step.maths.org/questions/90-s3-q8

## 关键思路

展开 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(py'+qy)$，再与 $Py''+Qy'+Ry$ 比较：这样便完全确定了 $p$ 和 $q$，而条件 $P''-Q'+R=0$ 正好令最后一个系数吻合。至于题中的微分方程（differential equation），这个条件成立，所以积分一次就能把二阶方程直接化为一阶线性方程，再用积分因子（integrating factor）便可完成。

## 解答

### 恰当性的判别准则

对任意函数 $p$、$q$ 和 $y$，由乘积法则（product rule）得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(py'+qy)=py''+(p'+q)y'+q'y. \qquad (*)$$

*仅当*。假设 $p$ 和 $q$（两者均与 $y$ 无关）使 $Py''+Qy'+Ry$ 对每一个 $y$ 都等于 $(*)$。取 $y=1$，得 $R=q'$。取 $y=x$，得 $Q+Rx=(p'+q)+q'x$，所以 $Q=p'+q$。取 $y=\frac{1}{2}x^2$，得 $P+Qx+\frac{1}{2}Rx^2=p+(p'+q)x+\frac{1}{2}q'x^2$，所以 $P=p$。因此

$$P''-Q'+R=p''-(p''+q')+q'=0.$$

*若*。假设 $P''-Q'+R=0$。取

$$p=P,\qquad q=Q-P'.$$

那么 $p'+q=P'+Q-P'=Q$，而利用该条件可得 $q'=Q'-P''=R$。由 $(*)$，对每一个 $y$ 都有 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(py'+qy)=Py''+Qy'+Ry$，这正是所要证明的。

以上的推导同时说明 $p$ 和 $q$ 必定是 $P$ 和 $Q-P'$，下面我们就用这个方法把它们求出来。

**微分方程**

这里 $P=x-x^4$、$Q=1-7x^3$ 及 $R=-9x^2$，所以

$$P''-Q'+R=-12x^2-(-21x^2)-9x^2=0.$$

判别准则适用，其中 $p=P=x-x^4$ 及 $q=Q-P'=(1-7x^3)-(1-4x^3)=-3x^3$。方程变成

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[(x-x^4)y'-3x^3y\right]=(x^3+3x)\mathrm{e}^x.$$

反复运用分部积分法（integration by parts），得 $\int x^3\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x=(x^3-3x^2+6x-6)\mathrm{e}^x$ 及 $\int 3x\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x=(3x-3)\mathrm{e}^x$，所以

$$(x-x^4)y'-3x^3y=(x^3-3x^2+9x-9)\mathrm{e}^x+C.$$

当 $x=2$ 时，$y=2\mathrm{e}^2$ 及 $y'=0$，所以左边是 $-3\cdot 8\cdot 2\mathrm{e}^2=-48\mathrm{e}^2$，右边是 $5\mathrm{e}^2+C$。因此 $C=-53\mathrm{e}^2$。

> ? **想一想** 左边的 $(x-x^4)y'-3x^3y$ 并不是 $(x-x^4)y$ 的导数。那么第二次积分该怎样做?

抽出因子 $x$：左边是 $x[(1-x^3)y'-3x^2y]=x\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[(1-x^3)y]$。（这就是常用的积分因子：$y'-\frac{3x^2}{1-x^3}y$ 的积分因子是 $\exp\int\frac{-3x^2}{1-x^3}\,\mathrm{d}x=1-x^3$。）由于解位于 $x=2$ 附近，可以除以 $x$，于是

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[(1-x^3)y]=(x^2-3x+9)\mathrm{e}^x-\frac{9\mathrm{e}^x}{x}-\frac{53\mathrm{e}^2}{x}.$$

再用分部积分法，得 $\int(x^2-3x+9)\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x=(x^2-5x+14)\mathrm{e}^x$。$\mathrm{e}^x/x$ 这一项没有初等原函数（elementary antiderivative），所以我们把它保留为由起点 $x=2$ 开始的积分：

$$(1-x^3)y=(x^2-5x+14)\mathrm{e}^x-53\mathrm{e}^2\ln\frac{x}{2}-9\int_2^x\frac{\mathrm{e}^t}{t}\,\mathrm{d}t+D.$$

当 $x=2$ 时，左边是 $-7\cdot 2\mathrm{e}^2=-14\mathrm{e}^2$，右边是 $8\mathrm{e}^2+D$，所以 $D=-22\mathrm{e}^2$。因此

$$\boxed{y=\frac{1}{1-x^3}\left[(x^2-5x+14)\mathrm{e}^x-22\mathrm{e}^2-53\mathrm{e}^2\ln\frac{x}{2}-9\int_2^x\frac{\mathrm{e}^t}{t}\,\mathrm{d}t\right]}$$

适用于 $x>1$。$y''$ 的系数 $x-x^4$ 在 $x=1$ 处为零，所以经过 $x=2$ 的解定义在 $x>1$ 上，而不一定能延伸至 $x=1$ 以外。

## 验算

- 当 $x = 2$ 时，方括号内的值是 $8e^2 - 22e^2 = -14e^2$，除以 $1 - 8 = -7$ 得 $y = 2e^2$，符合要求。
- 由 $x = 2$ 开始以数值方法逐步求解原方程（四阶龙格－库塔法，Runge–Kutta），得 $y(3) \approx 7.90306$，与公式的结果吻合，其中的积分以辛普森法则（Simpson's rule）计算。两者在 $x = 1.2$、1.5 和 4 处亦一致。
- 展开 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[(x - x^4)y' - 3x^3y\right]$，可还原为 $(x - x^4)y'' + (1 - 7x^3)y' - 9x^2y$。

## 常见错误

- 第一次积分后漏掉常数 $C$。它在这里并不是零，而且对数项正是由它产生的。
- 硬要把 $\int e^x/x\,\mathrm{d}x$ 写成闭合形式（closed form）。这是做不到的，所以应把它保留为下限是 2 的定积分，这样代入初始条件也方便得多。

## STEP 之外

若表达式 $Py'' + Qy' + Ry$ 是某个函数的全导数，便称它为恰当（exact）的。表达式 $P'' - Q' + R$ 就是伴随（adjoint）方程 $(Pz)'' - (Qz)' + Rz = 0$ 的左边在 $z = 1$ 时的值。一般而言，伴随方程的任何一个解 $z$ 都是积分因子，能使 $z(Py'' + Qy' + Ry)$ 成为恰当的。由伴随方程再往前走，便是自伴随（self-adjoint）问题，即施图姆－刘维尔（Sturm–Liouville）问题，以及格林函数（Green's function）。Boyce 与 DiPrima 所著的 *Elementary Differential Equations*（一本初等微分方程教科书）在二阶线性方程的习题中，涵盖了恰当方程和伴随方程。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。