详细解答

STEP III 1990，第 7 题

纯数学 · 隐函数曲线描绘

> **STEP III 1990，第 7 题**
>
> 继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：
>
> step.maths.org/questions/90-s3-q7

关键思路

隐函数微分法（implicit differentiation）做两次，便得到每一点的 $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x$ 和 $\mathrm{d}^2y/\mathrm{d}x^2$，而这些正是泰勒级数（Taylor series）的系数。至于不等式，窍门在于留意到这条方程只是 y 的*二次方程*：点 (x,y) 要存在，这个二次方程必须有实根，所以它的判别式（discriminant）非负。把二次方程直接解出来，便可看清整条曲线：两条分支（branch），在判别式等于零之处相接。

解答

以下一律记 $F(x,y)=xy^2+x^3+a^2y-a^3$。代入可知在 P、Q 和 R 均有 $F=0$；例如在 R 得 $a\cdot a^2+a^3-a^3-a^3=0$。

在 P、Q 和 R 的泰勒级数

把 y 视为 x 的函数，将 $F(x,y)=0$ 对 x 求导，

$$y^2+2xyy'+3x^2+a^2y'=0,\qquad \text{所以}\qquad y'=-\frac{y^2+3x^2}{2xy+a^2}.$$

把第一条方程再求导一次（$2xyy'$ 一项给出 $2yy'+2xy'^2+2xyy''$）：

$$4yy'+2xy'^2+6x+(2xy+a^2)\,y''=0.$$

在每一点，分母 $2xy+a^2$ 都不等于零，所以这些方程确定了 y' 和 y''，继而有 $y=y_0+y'h+\frac{1}{2}y''h^2+\cdots$。

在 $P(0,a)$： $y' = -a^2/a^2 = -1$。于是 $4a(-1) + a^2 y'' = 0$，所以 $y'' = 4/a$，而

$$y = a - h + \frac{2}{a}h^2 + \cdots.$$

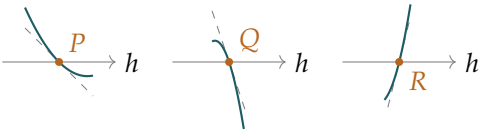
在 $Q(a,0)$： $y' = -3a^2/a^2 = -3$。于是 $0 + 2a(9) + 6a + a^2 y'' = 0$，所以 $y'' = -24/a$，而

$$y = -3h - \frac{12}{a}h^2 + \cdots.$$

在 $R(a,-a)$：这里 $2xy + a^2 = -a^2$，所以 $y' = -4a^2/(-a^2) = 4$。于是 $4(-a)(4) + 2a(16) + 6a - a^2 y'' = 0$，即 $22a = a^2 y''$，所以 $y'' = 22/a$，而

$$y = -a + 4h + \frac{11}{a}h^2 + \cdots.$$

因此在 P 附近，曲线以斜率（gradient）-1 下降，并且向上凹（concave up，即弯向切线上方）；在 Q 附近，曲线以斜率 -3 急降，并且向下凹（concave down）；在 R 附近，曲线以斜率 4 上升，并且向上凹。



（取 $a = 1$ 时的局部形状；虚线为切线。）

不等式

把 C 的方程写成 y 的二次方程：

$$x\,y^2 + a^2\,y + (x^3 - a^3) = 0.$$

若 $x \neq 0$ 而 (x,y) 在 C 上，这个二次方程便有实根 y，所以它的判别式非负：

$$a^4 - 4x(x^3 - a^3) \geq 0 \quad \Longleftrightarrow \quad 4x^4 - 4a^3 x - a^4 \leq 0.$$

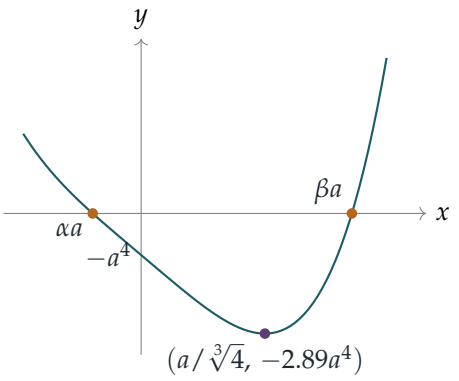
若 $x = 0$，左边等于 $-a^4 < 0$，所以不等式在该处同样成立。结果得证。

$y = 4x^4 - 4a^3 x - a^4$ 的图像

试题原文印的是 $4x^4 - 4a^3 - a^4$，这肯定是误植，应为我们刚刚遇到的四次多项式（quartic）$g(x) = 4x^4 - 4a^3 x - a^4$。我们有 $g(0) = -a^4$ 及 $g'(x) = 16x^3 - 4a^3$，后者只在 $x_0 = a/\sqrt[3]{4} \approx 0.63a$ 处等于零，g 在该处取得极小值。利用 $x_0^3 = a^3/4$，

$$g(x_0) = a^3 x_0 - 4a^3 x_0 - a^4 = -a^4(1 + 3 \cdot 4^{-1/3}) \approx -2.89a^4.$$

由于当 $x \to \pm\infty$ 时 $g \to +\infty$，而 g 先递减后递增，所以它恰好有两个零点 $x = \alpha a$ 和 $x = \beta a$，其中 $\alpha \approx -0.246$ 和 $\beta \approx 1.072$ 是 $4t^4 - 4t - 1 = 0$ 的根（它们没有简洁的闭合形式，我们也用不着）。此外 $g''(x) = 48x^2 \geq 0$，所以图像是凸（convex）的。



（以 $a = 1$ 绘画。）所以 C 上每一点都满足 $\alpha a \le x \le \beta a$：曲线位于一条垂直的带状区域之内。

曲线 C

当 $x \neq 0$ 时，解二次方程得出两条分支

$$y_\pm = \frac{-a^2 \pm \sqrt{D}}{2x}, \qquad D = a^4 + 4a^3x - 4x^4,$$

它们恰好在该带状区域上取实数值，并在 $D = 0$ 之处相接，即 $x = \alpha a$ 和 $x = \beta a$。在那里 $y = -a^2/(2x)$，而切线是垂直的，因为那正是 y' 的分母 $2xy + a^2$ 等于零的地方。由此得到 $(\beta a,\ -0.47a)$ 和 $(\alpha a,\ 2.03a)$ 两点。

> **想一想** 当 $x \to 0$ 时，两条分支会怎样?

把分子和分母同乘以 $\sqrt{D} + a^2$，并利用 $D - a^4 = 4x(a^3 - x^3)$，得

$$y_+ = \frac{2(a^3 - x^3)}{a^2 + \sqrt{D}},$$

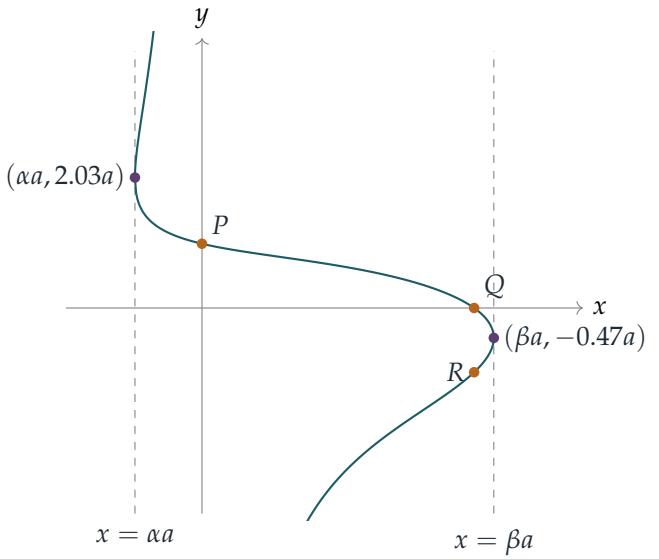
它在 $x = 0$ 处完全没有问题，并且在该处等于 a。所以 y_+ 是一条通过 P 的光滑分支。另一条分支在 x 很小时满足 $y_- \approx -a^2/x$，所以当 $x \to 0^+$ 时 $y_- \to -\infty$，当 $x \to 0^-$ 时 $y_- \to +\infty$。这就是沿 y 轴的渐近线（asymptote）。

再多几项事实，有助确定草图的形状。

- 曲线没有水平切线：$y' = 0$ 需要 $y^2 + 3x^2 = 0$，即 $(0,0)$，而这一点不在 C 上。
- 曲线只在 $x^3 = a^3$ 之处与 $y = 0$ 相交，即 Q；并且只在 P 与 $x = 0$ 相交。
- 在 $x = a$ 处，$D = a^4$，所以 $y_+ = 0$（点 Q）而 $y_- = -a$（点 R）。

综合以上各点，C 是一条连通的曲线。它在 y 轴左边不远处沿 y_- 从 $+\infty$ 下降，到达 $(\alpha a, 2.03a)$ 处的垂直切线。然后它沿 y_+ 折回，经过 P（斜率 -1），再下降经过 Q（斜率

-3），到达 $(\beta a, -0.47a)$ 处的垂直切线，接着沿 y_- 折回，经过 R（斜率 4），在 y 轴右边不远处下降至 $-\infty$。曲线在 P 向上凹，在 Q 向下凹，所以两点之间有一个拐点（point of inflection）。



（以 $a = 1$ 绘画；虚线是上文求得的带状区域的边界。）

验算

- 取 $a = 1.7$，我们在每一点附近的 $x = x_0 + h$ 处解出二次方程的 y。每当 h 减半，各个两项泰勒级数的误差便缩小约 8 倍，这正是我们预期的 h^3 表现。
- 随机取 10^5 个 x 值，二次方程有实根的情况，恰好就是 $4x^4 - 4a^3x - a^4 \leq 0$ 的情况。
- 用二分法（bisection）得 $\alpha \approx -0.2463$ 和 $\beta \approx 1.0724$。在 $x = \pm 0.001$ 处（取 $a = 1.7$），一个根接近 a，另一个根接近 $-a^2/x \approx \mp 2890$。

常见错误

- 漏掉因子 $\frac{1}{2}$：h^2 的系数是 $\frac{1}{2}y''$，不是 y''。
- 为了使用判别式而除以 x，却没有另外检查 $x = 0$ 的情况。
- 没有察觉 y_+ 光滑地通过 P。写成 $(-a^2 + \sqrt{D})/(2x)$ 时，它在 $x = 0$ 处看似奇异，其实不然。

STEP 之外

这一题中，我们利用隐式定义的函数的泰勒展开式，找出曲线在某一点附近的表现。保证在 $\partial F/\partial y \neq 0$ 之处 y 是 x 的光滑函数的定理，就是**隐函数定理**（implicit function theorem），它是多元分析（multivariable analysis）的一个重要结果。带状区域两端的垂直切线，正好出现在 $\partial F/\partial y = 2xy + a^2$ 等于零的点。这条曲线是平面上的三次曲线（cubic），而研究这类曲线会引领我们走向代数几何（algebraic geometry）和椭圆曲线（elliptic curve）。想做更多这种风格的题目，可试试 Siklos 的 *Advanced Problems in Mathematics*（进阶数学问题集）。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。