详细解答

STEP III 1990，第 6 题

纯数学 · 线性变换与椭圆

> **STEP III 1990，第 6 题**
>
> 继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：
>
> step.maths.org/questions/90-s3-q6

本题在 *Beyond STEP* 第 7.2 节只伸缩，不转向中有完整的引导式讲解：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/ch07/eigenvectors.html

关键思路

那两个特殊的向量是矩阵的特征向量（eigenvector），它们道出了整个几何图像：T 沿一条直线按某个倍数拉伸，又沿与之垂直的另一条直线按另一个倍数拉伸，于是单位圆变成一个椭圆（ellipse），其两轴就落在这两条直线上。代数方面，要求 E 的方程，最简洁的做法是先求 T 的逆，把 x 和 y 用 X 和 Y 表示，再代入 $x^2+y^2=1$。面积按行列式（determinant）的倍数缩放；又因为 T 把直线映射为直线，所以 E 的切线（tangent）就是 C 的切线的像。

解答

设 $M=\frac{2}{5}\begin{pmatrix}9 & -2\\ -2 & 6\end{pmatrix}$，则 T 就是左乘 M。

两个特殊方向

计算可得

$$M\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} = \frac{2}{5}\begin{pmatrix}9-4\\-2+12\end{pmatrix} = \frac{2}{5}\begin{pmatrix}5\\10\end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix},$$
$$M\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix} = \frac{2}{5}\begin{pmatrix}18+2\\-4-6\end{pmatrix} = \frac{2}{5}\begin{pmatrix}20\\-10\end{pmatrix} = 4\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}.$$

所以 $\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ 方向不变，并乘以 2；而 $\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}$ 方向不变，并乘以 4，正如题目所求。留意这两个方向互相垂直，因为 $1\cdot 2 + 2\cdot(-1) = 0$。

E 的方程

M 的行列式为

$$\det M = \left(\tfrac{2}{5}\right)^2 (9\cdot 6 - (-2)(-2)) = \tfrac{4}{25}\cdot 50 = 8,$$

其值非零，故 T 可逆（invertible），且

$$M^{-1} = \frac{1}{8}\cdot\frac{2}{5}\begin{pmatrix}6&2\\2&9\end{pmatrix} = \frac{1}{20}\begin{pmatrix}6&2\\2&9\end{pmatrix}.$$

因此，点 (X,Y) 是 (x,y) 的像，当且仅当

$$x = \frac{3X+Y}{10}, \qquad y = \frac{2X+9Y}{20}.$$

点 (X,Y) 在 E 上，当且仅当它的原像在 C 上，即当且仅当 $x^2+y^2=1$。代入得

$$\begin{aligned}\frac{(3X+Y)^2}{100} + \frac{(2X+9Y)^2}{400} = 1 &\iff 4(9X^2+6XY+Y^2) + (4X^2+36XY+81Y^2) = 400\\ &\iff 40X^2+60XY+85Y^2 = 400\\ &\iff 8X^2+12XY+17Y^2 = 80,\end{aligned}$$

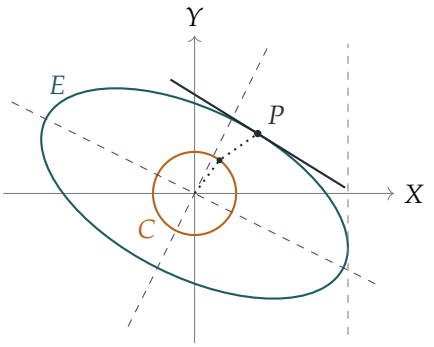
这就是所求的 E 的方程。

面积

线性映射（linear map）会把每一个面积乘以 $|\det M|$。C 所围成的圆盘面积为 π，所以 E 所围成的区域面积为

$$8\pi.$$

这与几何图像吻合：E 是一个椭圆，其半轴长为 2（沿 $\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ 方向）和 4（沿 $\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}$ 方向），而 $\pi\cdot 2\cdot 4 = 8\pi$。



图中显示 C、椭圆 E 及其两轴（虚线）、与 E 相切的铅垂线 $X = 2\sqrt{17/5}$，以及在 P 的切线，该点是 $\frac{1}{5}(3,4)$ 的像。

X 的最大值

把 E 的方程看成 Y 的二次方程：

$$17Y^2 + 12XY + (8X^2 - 80) = 0.$$

某个 X 值会在 E 上出现，当且仅当此方程有实根 Y，即当且仅当其判别式（discriminant）非负：

$$\begin{aligned} 144X^2 - 4 \cdot 17(8X^2 - 80) \geq 0 &\iff 144X^2 - 544X^2 + 5440 \geq 0 \\ &\iff 400X^2 \leq 5440 \\ &\iff X^2 \leq \tfrac{68}{5}. \end{aligned}$$

所以 E 上每一点都满足 $X \leq \sqrt{68/5} = 2\sqrt{17/5}$，而且等号可以取到（此时判别式为零，得出唯一的一点，其 $Y = -\frac{6X}{17}$）。因此 X 在 E 上的最大值为 $2\sqrt{17/5}$，正如题目所求。

想一想 有没有办法不用判别式，直接从圆看出这个结果?

有。在 E 上有 $X = \frac{2}{5}(9x - 2y)$，其中 $x^2 + y^2 = 1$。设 $(x, y) = (\cos\theta, \sin\theta)$，则表达式 $9\cos\theta - 2\sin\theta$ 的最大值为 $\sqrt{81 + 4} = \sqrt{85}$（即 $R\cos(\theta + \alpha)$ 的形式）。所以最大的 X 是 $\frac{2}{5}\sqrt{85} = 2\sqrt{85/25} = 2\sqrt{17/5}$，与上面的结果一致。

切线

C 上的点 $\frac{1}{5}(3,4)$ 被映射到

$$P = \frac{2}{5}\begin{pmatrix} 9 \cdot \frac{3}{5} - 2 \cdot \frac{4}{5} \\ -2 \cdot \frac{3}{5} + 6 \cdot \frac{4}{5} \end{pmatrix} = \frac{2}{5}\begin{pmatrix} \frac{19}{5} \\ \frac{18}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{38}{25} \\ \frac{36}{25} \end{pmatrix}.$$

C 在 $\frac{1}{5}(3,4)$ 的切线垂直于该处的半径，所以它的方程是

$$3x + 4y = 5.$$

由于 T 是线性而且可逆的，它把直线映射为直线，并且把一条与 C 恰好交于一点的直线，映射为一条与 E 恰好交于一点的直线。所以 E 在 P 的切线就是这条直线的像。代入 $x = \frac{3X+Y}{10}$ 和 $y = \frac{2X+9Y}{20}$：

$$\begin{aligned}\frac{3(3X+Y)}{10} + \frac{4(2X+9Y)}{20} = 5 &\iff 6(3X+Y) + 4(2X+9Y) = 100\\ &\iff 26X + 42Y = 100,\end{aligned}$$

所以 E 在 P 的切线是

$$13X + 21Y = 50.$$

验算一下：$13 \cdot \frac{38}{25} + 21 \cdot \frac{36}{25} = \frac{494+756}{25} = 50$，所以 P 在这条直线上。另一个做法是对 $8X^2 + 12XY + 17Y^2 = 80$ 作隐函数微分（implicit differentiation），得出在 P 的法线（normal）方向为 $(16X + 12Y,\ 12X + 34Y) = \frac{1}{25}(1040, 1680)$，它与 $(13,21)$ 平行，于是得出同一条直线。

验算

- $(1,0)$ 的像是 $\frac{2}{5}(9,-2)$，而 $\frac{4}{25}\left(8 \cdot 81 - 12 \cdot 18 + 17 \cdot 4\right) = \frac{4}{25} \cdot 500 = 80$，所以它在 E 上。
- 两轴的端点 $\pm 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{5}}(1,2)$ 和 $\pm 4 \cdot \frac{1}{\sqrt{5}}(2,-1)$ 都满足 E 的方程；例如 $\frac{4}{5}(8 + 24 + 68) = 80$。
- 数值上，在 C 上取样 200 000 个点，得出最大值 $X \approx 3.687818$，与 $2\sqrt{17/5} \approx 3.687818$ 相符；而用鞋带公式（shoelace formula）计算像多边形的面积，得 $25.13274 \approx 8\pi$。

常见错误

- 代入 $x^2 + y^2 = 1$ 时用了 M 而不是 M^{-1}：要求像曲线的方程，需要把旧坐标用新坐标表示。
- 计算行列式时忘记了因子 $\frac{2}{5}$：它贡献的是 $\left(\frac{2}{5}\right)^2$，而不是 $\frac{2}{5}$。
- 求出了像点 P，却用 C 在 $\frac{1}{5}(3,4)$ 的斜率来写 E 的切线：线性映射保持相切关系，但不保持斜率。

STEP 之外

这里的矩阵是对称（symmetric）的，这正是它的特征向量互相垂直的原因：这是谱定理（spectral theorem）的二维情形，该定理指出每个实对称矩阵都可以用一个旋转来对角化（diagonalise）。它解释了为甚么任何二次型（quadratic form）$ax^2 + 2hxy + by^2$ 所描述的圆锥曲线（conic）都有互相垂直的主轴，而该二次型的矩阵的特征值（eigenvalue）可以让你立刻知道它的形状。Strang 的 *Introduction to Linear Algebra*（线性代数入门）以大量几何图像阐述特征值、对称矩阵和二次型。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。