详细解答

STEP III 1990，第 5 题

纯数学 · 莱布尼兹定理

STEP III 1990，第 5 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/90-s3-q5

关键思路

帕斯卡法则（Pascal's rule）只不过是含阶乘（factorial）的分数运算，把两项通分即可。莱布尼兹公式（Leibniz's formula）给出乘积的 n 阶导数（derivative），其证明是对 n 用数学归纳法（induction）：把 n 阶的公式再求导一次，每个混合项都会出现两次，而帕斯卡法则正好把每一对合并起来。至于最后一部分，直接把 $y = \sin^{-1} x$ 求导 n 次是行不通的。我们改为找出 y 所满足的一条简单二阶方程，再对它应用莱布尼兹公式。

（试卷上印的是 $y = \sin^{-1} y$。这显然是 $y = \sin^{-1} x$ 的误印，我们采用后者。）

解答

帕斯卡法则

回想 $\binom{n}{r} = \dfrac{n!}{r!\,(n-r)!}$，其中 $0! = 1$。当 $1 \le r \le n$ 时，$r-1$ 和 $n-r$ 均为非负数，所以下面每个阶乘都有意义。由于 $r! = r\,(r-1)!$ 及 $(n-r+1)! = (n-r+1)\,(n-r)!$，公分母是 $r!\,(n-r+1)!$：

$$\begin{aligned}\binom{n}{r} + \binom{n}{r-1} &= \frac{n!}{r!\,(n-r)!} + \frac{n!}{(r-1)!\,(n-r+1)!} \\ &= \frac{n!\,(n-r+1)}{r!\,(n-r+1)!} + \frac{n!\,r}{r!\,(n-r+1)!} \\ &= \frac{n!\,(n+1)}{r!\,(n+1-r)!} = \frac{(n+1)!}{r!\,(n+1-r)!} = \binom{n+1}{r}.\end{aligned}$$

莱布尼兹公式

我们假设 u 和 v 可按需要求导任意多次。用求和记号表示，要证明的是

$$(uv)^{(n)} = \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} u^{(n-r)} v^{(r)},$$

其中 $z^{(0)}$ 表示 z 本身。我们对 $n \geq 1$ 用数学归纳法证明。

基础步骤（base case） $n = 1$。右边是 $u^{(1)}v + uv^{(1)}$，由乘法法则（product rule）可知它就是 $(uv)'$。

归纳步骤（inductive step）。假设公式对某个 $n \geq 1$ 成立。把它求导，对每一项使用乘法法则：

$$(uv)^{(n+1)} = \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} u^{(n+1-r)} v^{(r)} + \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} u^{(n-r)} v^{(r+1)}.$$

在第二个和式中设 $s = r + 1$，它便成为 $\sum_{s=1}^{n+1} \binom{n}{s-1} u^{(n+1-s)} v^{(s)}$。现在两个和式都由形如 $u^{(n+1-r)}v^{(r)}$ 的项组成。把第一个和式的 $r = 0$ 项和第二个和式的 $s = n + 1$ 项分拆出来：

$$\begin{aligned}(uv)^{(n+1)} &= u^{(n+1)}v + \sum_{r=1}^{n} \left[\binom{n}{r} + \binom{n}{r-1} \right] u^{(n+1-r)} v^{(r)} + uv^{(n+1)} \\ &= u^{(n+1)}v + \sum_{r=1}^{n} \binom{n+1}{r} u^{(n+1-r)} v^{(r)} + uv^{(n+1)},\end{aligned}$$

这里用了帕斯卡法则，因为 $1 \leq r \leq n$，所以法则适用。由于 $\binom{n+1}{0} = \binom{n+1}{n+1} = 1$，上式即

$$(uv)^{(n+1)} = \sum_{r=0}^{n+1} \binom{n+1}{r} u^{(n+1-r)} v^{(r)},$$

这正是 $n + 1$ 时的公式。根据数学归纳法，公式对所有 $n \geq 1$ 成立。

$\sin^{-1} x$ 的导数

设 $y = \sin^{-1} x$，其中 $-1 < x < 1$。则

$$y^{(1)} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}, \qquad \text{所以} \qquad (1 - x^2)(y^{(1)})^2 = 1.$$

把此式对 x 求导，

$$(1 - x^2) \cdot 2y^{(1)} y^{(2)} - 2x(y^{(1)})^2 = 0.$$

由于在 $(-1, 1)$ 上 $y^{(1)} > 0$，我们可以除以 $2y^{(1)}$：

$$(1 - x^2)\, y^{(2)} - x\, y^{(1)} = 0. \qquad (*)$$

这就是 $n = 0$ 时所要求的结果。

想一想 为甚么先把 $y^{(1)}$ 平方再求导，而不直接把 $(1-x^2)^{-1/2}$ 求导?

直接把 $(1-x^2)^{-1/2}$ 求导，得 $y^{(2)} = x(1-x^2)^{-3/2}$，再乘以 $1-x^2$ 同样得到 $(*)$。两种做法都可行。重点是要得出一条方程，其系数是 x 的多项式（polynomial），而且对 y 的各阶导数而言是线性（linear）的，因为这正是莱布尼兹公式处理得干净俐落的情况：多项式系数求导几次便变成零。

现在把 $(*)$ 求导 n 次，其中 $n \geq 1$，对每个乘积应用莱布尼兹公式。对第一个乘积，取 $u = y^{(2)}$ 和 $v = 1-x^2$。则 $v^{(1)} = -2x$，$v^{(2)} = -2$，而所有更高阶的导数均为零，所以只剩下三项：

$$\left((1-x^2)\,y^{(2)}\right)^{(n)} = (1-x^2)\,y^{(n+2)} + \binom{n}{1}(-2x)\,y^{(n+1)} + \binom{n}{2}(-2)\,y^{(n)}.$$

（当 $n=1$ 时最后一项不存在，这与 $\binom{1}{2}=0$ 吻合。）对第二个乘积，取 $u = y^{(1)}$ 和 $v = x$，所以只剩下两项：

$$\left(x\,y^{(1)}\right)^{(n)} = x\,y^{(n+1)} + n\,y^{(n)}.$$

两式相减，$(*)$ 的 n 阶导数是

$$(1-x^2)\,y^{(n+2)} - 2nx\,y^{(n+1)} - n(n-1)\,y^{(n)} - x\,y^{(n+1)} - n\,y^{(n)} = 0.$$

合并同类项，$-2nx - x = -(2n+1)x$ 及 $-n(n-1) - n = -n^2$，所以

$$(1-x^2)\,y^{(n+2)} - (2n+1)x\,y^{(n+1)} - n^2 y^{(n)} = 0,$$

这正是所要求的结果。它对所有 $n \geq 0$ 及 $(-1,1)$ 内的所有 x 成立。

验算

- 在莱布尼兹公式中取 $n=1$：得到乘法法则。取 $n=2$：$(uv)'' = u''v + 2u'v' + uv''$，你可以把 $u'v + uv'$ 求导来核实。
- 在 $x=0$ 处，最后的结果给出 $y^{(n+2)}(0) = n^2 y^{(n)}(0)$。配合 $y^{(1)}(0) = 1$，可得 $y^{(3)}(0) = 1$ 和 $y^{(5)}(0) = 9$，所以麦克劳林级数（Maclaurin series）的开首是 $x + \frac{x^3}{6} + \frac{9x^5}{120} = x + \frac{x^3}{6} + \frac{3x^5}{40}$，这正是 $\sin^{-1} x$ 的已知级数。
- 我们作了数值验算：对所有 $n < 60$ 检验帕斯卡法则；用 300 对随机多项式精确检验莱布尼兹公式；并利用 $(1-x^2)^{-1/2}$ 的泰勒系数（Taylor coefficients），在 $(-1,1)$ 内的六个点上对 n 直至 27 检验最后的恒等式。相对残差小于 10^{-15}。

常见错误

- 在归纳步骤中把第二个和式重新编排指标后，弄错二项式系数（binomial coefficient）。应先把 $r = 0$ 和 $r = n + 1$ 这两个首尾项分开写出，然后才应用帕斯卡法则。
- 试图直接把 $\sin^{-1} x$ 求导 n 次，而不先找出方程 $(*)$。
- 把 $1 - x^2$ 求导时，漏掉因子 $\binom{n}{2}$ 或负号。

STEP 之外

先找出一条系数为多项式的线性微分方程（differential equation），再把它求导 n 次，这个技巧是求泰勒系数递推关系（recurrence）的标准方法。它直接通往常微分方程（ODE）的幂级数解法（power-series solutions），勒让德（Legendre）函数和贝塞尔（Bessel）函数正是由此而来。莱布尼兹公式也是二项式定理（binomial theorem）在微积分中的版本：若 $u = \mathrm{e}^{ax}$ 而 $v = \mathrm{e}^{bx}$，它便化为 $(a+b)^n = \sum \binom{n}{r} a^{n-r} b^r$。想进一步了解级数解法，可参阅 Boyce 与 DiPrima 的 *Elementary Differential Equations*（初等微分方程）。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。