详细解答

STEP III 1990，第 4 题

纯数学 · 三角级数

STEP III 1990，第 4 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/90-s3-q4

关键思路

两个级数（series）都是余弦之和，而且角度按等差递增，所以有两件顺手的工具。对于单纯的和，可乘以 $2\sin\beta$ 并使用积化和差公式（product-to-sum formula）：每一项都拆成两个正弦之差，整个和便会裂项相消（telescope）。对于二项式的和，以及最后的恒等式，可把 $\cos\phi$ 看成 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}$ 的实部（real part）。这样，二项式定理（binomial theorem）或等比级数（geometric series）公式便会代劳，最后取实部或虚部（imaginary part）就得出答案。

解答

第一个级数

把这个和记作 S。根据积化和差公式 $2\sin A\cos B = \sin(B+A) - \sin(B-A)$，

$$2\sin\beta\cos(\alpha+2r\beta) = \sin(\alpha+(2r+1)\beta) - \sin(\alpha+(2r-1)\beta).$$

把 $r = 0, 1, \ldots, n$ 的各式相加，和便裂项相消：对应 r 的第一个正弦，与对应 $r+1$ 的第二个正弦互相抵消。因此只剩下两项：

$$\begin{aligned} 2\sin\beta\, S &= \sin(\alpha+(2n+1)\beta) - \sin(\alpha-\beta) \\ &= 2\cos(\alpha+n\beta)\sin((n+1)\beta), \end{aligned}$$

这里用了 $\sin P - \sin Q = 2\cos\frac{P+Q}{2}\sin\frac{P-Q}{2}$，其中 $\frac{P+Q}{2} = \alpha+n\beta$ 及 $\frac{P-Q}{2} = (n+1)\beta$。由于 $\sin\beta \neq 0$，我们可以除以它，得

$$\boxed{\sum_{r=0}^{n}\cos(\alpha+2r\beta) = \frac{\sin(n+1)\beta\,\cos(\alpha+n\beta)}{\sin\beta}}$$

留意 $\alpha + n\beta$ 正是首尾两个角的平均值，这可用来粗略核对答案的形式是否合理。

二项式级数

把这个和记作 T。由于 $\cos\phi = \operatorname{Re} e^{i\phi}$，而二项式系数（binomial coefficient）都是实数，

$$T = \operatorname{Re} \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} e^{i\alpha} (e^{2i\beta})^r = \operatorname{Re}\left[e^{i\alpha}(1 + e^{2i\beta})^n\right]$$

这是根据二项式定理得出的。现在抽出“半角”因子：

$$1 + e^{2i\beta} = e^{i\beta}(e^{-i\beta} + e^{i\beta}) = 2\cos\beta\, e^{i\beta}.$$

因此 $e^{i\alpha}(1 + e^{2i\beta})^n = 2^n \cos^n\beta\, e^{i(\alpha+n\beta)}$，而由于 $2^n\cos^n\beta$ 是实数，

$$\boxed{\sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} \cos(\alpha + 2r\beta) = 2^n \cos^n\beta\, \cos(\alpha + n\beta)}$$

（这一个其实并不需要 $\sin\beta \neq 0$。）

最后的恒等式

式中出现正割，表示我们需要 $\cos\theta \neq 0$，这是题目隐含的条件。第 r 项是 $\cos r\theta\, \sec^r\theta = \operatorname{Re}(e^{i\theta}\sec\theta)^r$，因为 $\sec^r\theta$ 是实数。于是设

$$w = e^{i\theta}\sec\theta = \frac{\cos\theta + i\sin\theta}{\cos\theta} = 1 + i\tan\theta.$$

左方就是 $\operatorname{Re}(1 + w + \cdots + w^n)$。

> **想一想** 为甚么在这里可以放心使用等比级数公式？w 又为甚么有帮助？

这条公式需要 $w \neq 1$，而 $w - 1 = i\tan\theta \neq 0$ 正正是因为 $\sin\theta \neq 0$。题目的条件就是用在这里。引入 w 的好处在于 $w - 1$ 是纯虚数（purely imaginary），所以除以它很容易，而 w^{n+1} 则可由指数形式 $w = \sec\theta\, e^{i\theta}$ 轻易算出。设 $t = \tan\theta$，

$$1 + w + \cdots + w^n = \frac{w^{n+1} - 1}{w - 1} = \frac{\sec^{n+1}\theta\, e^{i(n+1)\theta} - 1}{it}.$$

对任意复数 z 及实数 $t \neq 0$，我们有 $\operatorname{Re}\dfrac{z}{it} = \operatorname{Re}\dfrac{-iz}{t} = \dfrac{\operatorname{Im} z}{t}$。分子中的 -1 虚部为零，所以

$$\sum_{r=0}^{n} \cos r\theta\, \sec^r\theta = \frac{\sec^{n+1}\theta\, \sin(n+1)\theta}{\tan\theta} = \sec^{n+1}\theta\, \sin(n+1)\theta \cdot \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$$
$$= \frac{\sin(n+1)\theta\, \sec^n\theta}{\sin\theta},$$

这就是所求的结果。

*与第一部分的联系。*把全式乘以 $\cos^n\theta$，恒等式便变成

$$\sum_{r=0}^{n}\cos r\theta\cos^{n-r}\theta=\frac{\sin(n+1)\theta}{\sin\theta}.$$

你也可以对 n 用归纳法（induction）证明这个形式：若 C_n 为左方，则 $C_n=\cos\theta\,C_{n-1}+\cos n\theta$，而 $\sin n\theta\cos\theta+\cos n\theta\sin\theta=\sin(n+1)\theta$ 便完成归纳步骤。

验算

- $n=0$：三条公式都化为各自唯一的首项（$\cos\alpha$、$\cos\alpha$ 和 1）。
- 在第一个和中，$\beta\to 0$ 时 $\frac{\sin(n+1)\beta}{\sin\beta}\to n+1$，所以 $S\to(n+1)\cos\alpha$，这与 $n+1$ 个相等的项之和吻合。在第二个和中，$\beta=0$ 给出 $2^n\cos\alpha$，因为 $\sum\binom{n}{r}=2^n$。
- $\theta=\pi/4$，$n=2$：左方是 $1+\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\sqrt{2}+0=2$，右方是 $\sin\frac{3\pi}{4}\cdot 2/\sin\frac{\pi}{4}=2$。
- 数值上，随机选取 20 000 组 α、β、θ 及 $n\le 15$，三条公式与直接求和的结果都吻合，相对误差在 10^{-9} 以内。

常见错误

- 忘记第一个级数共有 $n+1$ 项（由 $r=0$ 至 n），结果得出 $\sin n\beta$ 而不是 $\sin(n+1)\beta$。
- 把 $1+\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\beta}$ 写成 $2\cos\beta$，漏掉因子 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta}$，令答案中的角度出现偏移。
- 在最后一部分，把分子和分母分别取实部。你必须先把分母化为实数。

STEP 之外

把 cos 写成指数的实部，三角函数的和便化为等比或二项式的和。这正是傅里叶分析（Fourier analysis）的起点：第一个和本质上就是狄利克雷核（Dirichlet kernel）$\sin\big((n+\frac{1}{2})x\big)/\sin\frac{x}{2}$，它决定了傅里叶级数（Fourier series）如何收敛。Needham 的 *Visual Complex Analysis*（《复分析：可视化方法》）以优美的几何观点，解释了为甚么乘以 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ 就是旋转，以及为甚么这类和最终能收拢成简洁的公式。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。