详细解答

STEP III 1990，第 2 题

纯数学 · 三维向量

STEP III 1990，第 2 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/90-s3-q2

关键思路

四点全部位于同一条曲线 $t \mapsto (t^3, t^2, t)$ 上，这条曲线称为三次挠线（twisted cubic）。两条相交的直线必定位于同一平面上，所以第 (i) 部分归结为证明 O、A、B、C 永不共面（coplanar），而这是一个行列式（determinant），它可以像范德蒙行列式（Vandermonde determinant）那样因式分解。在第 (ii) 部分，条件 $ab = 1$ 令纯量积（scalar product）和长度都化为单一个量 $a^2 + 1/a^2$ 的函数。

解答

首先，“相异”告诉我们甚么？参数为 t 的点，其第三个坐标就是 t 本身，所以不同的点有不同的参数。因此 a、b、c 互不相同，而由于 O 是 $t = 0$ 所对应的点，a、b、c 均不为零。

第 (i) 部分

假设直线 OA 与 BC 确实相交。通过同一点的两条直线位于同一平面上（若两线刚好重合，任何包含它们的平面皆可）。于是 O、A、B、C 全部位于同一个通过原点的平面上，而位置向量（position vector）$\mathbf{a} = \overrightarrow{OA}$、$\mathbf{b} = \overrightarrow{OB}$、$\mathbf{c} = \overrightarrow{OC}$ 就会线性相关（linearly dependent）。这种情况恰好在以下条件成立时出现：

$$D = \begin{vmatrix} a^3 & a^2 & a \\ b^3 & b^2 & b \\ c^3 & c^2 & c \end{vmatrix} = 0.$$

从第一行抽出因子 a，第二行抽出 b，第三行抽出 c，

$$D = abc\begin{vmatrix} a^2 & a & 1 \\ b^2 & b & 1 \\ c^2 & c & 1 \end{vmatrix}.$$

把首两行各自减去第三行，然后沿最后一列展开：

$$D = abc\begin{vmatrix} (a-c)(a+c) & a-c & 0 \\ (b-c)(b+c) & b-c & 0 \\ c^2 & c & 1 \end{vmatrix} = abc\,(a-c)(b-c)\begin{vmatrix} a+c & 1 \\ b+c & 1 \end{vmatrix}$$
$$= abc\,(a-b)(a-c)(b-c).$$

每个因子都不为零：$a, b, c \neq 0$，而且 a、b、c 互不相同。所以 $D \neq 0$，四点不共面，因此直线 OA 与 BC 不可能相交。（两线亦不平行，所以它们是异面直线（skew lines）。）

想一想 为甚么只需证明四点不共面便已足够?

因为相交的直线必定张成一个平面。假如 OA 与 BC 相交于点 P，那么通过 P 并包含这两条直线的平面就会包含 O、A、B 和 C。我们已证明这样的平面并不存在。

第 (ii) 部分

设 $b = 1/a$。那么 $a \neq 0$，并且 $a \neq \pm 1$，否则 $b = a$，A 与 B 便会重合。纯量积为

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = (ab)^3 + (ab)^2 + ab = 3,$$

而长度的平方为

$$|\mathbf{a}|^2 = a^2(a^4 + a^2 + 1), \qquad |\mathbf{b}|^2 = \frac{1}{a^6} + \frac{1}{a^4} + \frac{1}{a^2} = \frac{a^4 + a^2 + 1}{a^6}.$$

两式相乘，得 $|\mathbf{a}|^2|\mathbf{b}|^2 = (a^4 + a^2 + 1)^2/a^4$，所以 $|\mathbf{a}||\mathbf{b}| = (a^4 + a^2 + 1)/a^2$，这是正数。记 $\theta = \angle AOB$，则

$$\cos\theta = \frac{3a^2}{a^4 + a^2 + 1} = \frac{3}{u+1}, \qquad \text{其中} u = a^2 + \frac{1}{a^2}.$$

哪些值可以出现。根据算术几何平均不等式（AM–GM）（或由于 $a^2 + a^{-2} - 2 = (a - a^{-1})^2$），$u \geq 2$，等号仅在 $a^2 = 1$ 时成立，而这个情况已被排除。所以 $u > 2$，因此

$$0 < \cos\theta = \frac{3}{u+1} < \frac{3}{3} = 1,$$

由此得 $0 < \theta < \frac{1}{2}\pi$。其他角度都不可能出现。

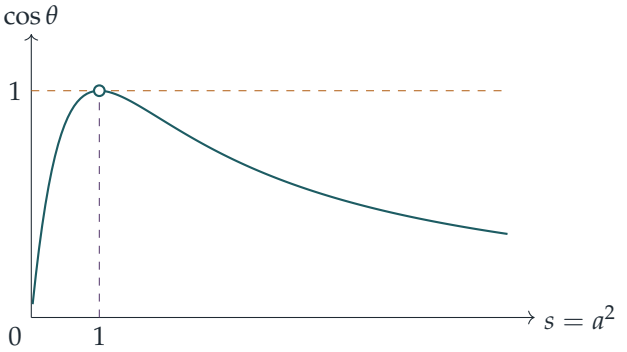
每个这样的值都会出现。任取满足 $0 < \theta < \frac{1}{2}\pi$ 的 θ，于是 $0 < \cos\theta < 1$。我们需要 $u = 3/\cos\theta - 1$，而这个值大于 2。方程 $a^2 + 1/a^2 = u$ 是以 a^2 为未知数的二次方程 $(a^2)^2 - u\,a^2 + 1 = 0$，它有一个根

$$a^2 = \frac{u + \sqrt{u^2 - 4}}{2} > 1,$$

由于 $u > 2$，这个根是实数。取 a 为其正平方根，并取 $b = 1/a$。那么 $a > 1 > b > 0$，所以 $ab = 1$，$A \neq B$，两点都不是 O，并且 $\cos\angle AOB = 3/(u+1) = \cos\theta$。因此 $\angle AOB = \theta$，因为两个角都在 $[0, \pi]$ 之内，而余弦函数在这个区间上是一对一（one-to-one）的。

所以 $\angle AOB$ 可取 $0 < \angle AOB < \frac{1}{2}\pi$ 内的每一个值，而不能取其他值，正如题目所求。

下图显示 $\cos\theta$ 对 $s = a^2$ 的图像。曲线在被排除的值 $s = 1$ 处升至 1，并在两端趋向 0，所以它的值恰好填满 $(0, 1)$。



验算

- 试取 $a = 2$、$b = \frac{1}{2}$：$A = (8, 4, 2)$ 和 $B = (\frac{1}{8}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2})$ 给出 $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = 1 + 1 + 1 = 3$，而公式给出 $\cos\theta = 12/21 = 4/7$，所以 $\theta \approx 55.2°$，确实在区间之内。
- 当 $a \to 1$ 时，点 A 与 B 合而为一，$\theta \to 0$。当 $a \to \infty$ 时，A 几乎沿著 x 轴远去，而 B 几乎沿著 z 轴趋近 O，所以 $\theta \to \frac{1}{2}\pi$。这正是区间的两端。
- D 的因式分解已用数千组随机有理数 a、b、c 作精确验证，角度公式及其值域亦已用数值方法验证。

常见错误

- 忘记说明为何 a、b、c 互不相同且不为零。正是这些事实令 $D \neq 0$。
- 没有排除 $a = \pm 1$，单凭 $\cos\theta < 1$ 就下结论。严格不等式 $u > 2$ 才是排除 $\theta = 0$ 的关键。

- 只证明“没有其他值”。题目还要求你证明区间内每一个值都能取到，这需要明确给出一个 a。

STEP 之外

曲线 (t^3, t^2, t) 就是三次挠线，是代数几何（algebraic geometry）中的标准例子。第 (i) 部分所说的，就是这条曲线上任意四点都不共面，而你计算的行列式是一个范德蒙行列式，它在多项式插值（polynomial interpolation）和线性独立（linear independence）的论证中会再次出现。Strang 的 *Introduction to Linear Algebra*（线性代数入门）对行列式和线性独立有清晰的讲解。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。