详细解答

STEP III 1990，第 16 题

概率与统计 • 几何概率

STEP III 1990，第 16 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/90-s3-q16

本题在 *Beyond STEP* 第 12.21 节折断一根棒中有完整的引导式讲解：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/ch12/broken-stick.html

关键思路

三段总长固定的线段，恰好在每一段都小于总长的一半时，才可以组成三角形。三角形一旦存在，它是钝角三角形（obtuse triangle）的充要条件，就是最长边的平方大于另外两边的平方和（余弦定理（cosine rule））。两部分都可化为关于随机变量（random variable）的条件，而所求的概率在 (i) 中变成区间的长度，在 (ii) 中变成区域的面积。

解答

第 (i) 部分

三段的长度分别是 X、$\frac{1}{2}(1-X)$ 和 $\frac{1}{2}(1-X)$，总长为 1。三个正数长度可以组成三角形，当且仅当每一个都小于另外两个之和，即小于周界的一半，在这里就是 $\frac{1}{2}$。只要 $X>0$，两段相等的线段都满足 $\frac{1}{2}(1-X)<\frac{1}{2}$，所以唯一的条件是 $X<\frac{1}{2}$。设 T 为可以组成三角形这个事件，则

$$\mathrm{P}(T)=\mathrm{P}\left(0<X<\tfrac{1}{2}\right)=\tfrac{1}{2}.$$

一个三角形是钝角三角形，当且仅当最长边的平方大于另外两边的平方和。哪一条边最长，则取决于 X。

- 若 $X\le\frac{1}{3}$，则 $X\le\frac{1}{2}(1-X)$，所以两段相等的线段之一是最长边。这时要检验的条件是 $\frac{1}{4}(1-X)^2>\frac{1}{4}(1-X)^2+X^2$，即 $X^2<0$，这是不可能发生的。这个三角形是等腰

三角形（isosceles triangle），底边不比两条等边长，所以它永远不是钝角三角形。

- 若 $\frac{1}{3} < X < \frac{1}{2}$，最长边是 X，而三角形是钝角三角形，当且仅当

$$X^2 > 2 \cdot \tfrac{1}{4}(1-X)^2 \iff X > \frac{1-X}{\sqrt{2}},$$

这里取正平方根，因为两边都是正数。整理后得 $X(\sqrt{2}+1) > 1$，即 $X > \dfrac{1}{\sqrt{2}+1} = \sqrt{2}-1 \approx 0.414$，这个值确实落在 $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right)$ 之内。

设 O 为三角形是钝角三角形这个事件，则 $O \cap T$ 就是事件 $\sqrt{2}-1 < X < \frac{1}{2}$。由于 X 服从均匀分布（uniform distribution），

$$\mathrm{P}(O \mid T) = \frac{\mathrm{P}(\sqrt{2}-1 < X < \frac{1}{2})}{\mathrm{P}(T)} = \frac{\frac{1}{2} - (\sqrt{2}-1)}{\frac{1}{2}} = 1 - 2\sqrt{2} + 2 = 3 - 2\sqrt{2},$$

正如所求。

第 (ii) 部分

这个构作总是可行的。 以 $(1,0)$、$(1,1)$、$(0,1)$ 为顶点的三角形 R，就是满足 $x \le 1$、$y \le 1$ 和 $x + y \ge 1$ 的点所组成的集合。题目给出的三条边 x、y、$2-x-y$ 总长为 2，它们可以组成一个三角形（可能是退化（degenerate）的），当且仅当三者皆非负，而且没有一个超过周界的一半，即 1：

- $0 \le x \le 1$ 和 $0 \le y \le 1$ 在 R 上成立；
- $2 - x - y \le 1$ 其实就是 $x + y \ge 1$，而 $2 - x - y \ge 0$ 可由 $x \le 1$、$y \le 1$ 推出。

所以 R 上的每一点都给出一个三角形。只有在 R 的边上，三角形才是退化的，而这些边的概率为零。

$\angle ABC$ 何时是钝角？ 位于 B 的角夹在 BA 与 BC 之间，所以它的对边是 $CA = y$。根据余弦定理，$\angle ABC$ 是钝角，当且仅当 $CA^2 > AB^2 + BC^2$：

$$y^2 > x^2 + (2-x-y)^2.$$

展开 $(2-x-y)^2 = (2-x)^2 - 2(2-x)y + y^2$，$y^2$ 项互相抵消，条件变成

$$2(2-x)y > x^2 + (2-x)^2 = 2x^2 - 4x + 4.$$

由于 $x \le 1$，我们有 $2 - x > 0$，所以可以把两边除以 $2(2-x)$ 而不必改变不等号的方向：

$$y > \frac{x^2 - 2x + 2}{2 - x},$$

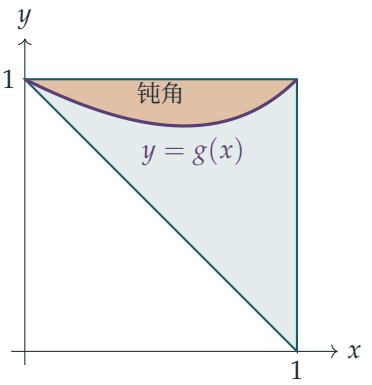
正如所求。把右边记作 $g(x)$。

想一想 曲线 $y=g(x)$ 真的一直留在三角形 R 之内吗?

我们需要它在 $0\le x\le 1$ 时位于直线 $y=1-x$ 与 $y=1$ 之间，这样钝角区域就正好是 R 在曲线上方的部分。事实上，

$$1-g(x)=\frac{(2-x)-(x^2-2x+2)}{2-x}=\frac{x(1-x)}{2-x}\ge 0,\qquad g(x)-(1-x)=\frac{x}{2-x}\ge 0,$$

而且 $g(0)=g(1)=1$。所以曲线由 $(0,1)$ 走到 $(1,1)$，中途降到 $y=1$ 之下，但从不低于斜边 $x+y=1$。



概率。 三角形 R 的面积是 $\frac{1}{2}$，所以联合密度（joint density）在 R 上等于 2，于是

$$\mathrm{P}(\angle ABC \text{ 为钝角})=2\times \text{面积}\{(x,y):g(x)<y\le 1,\ 0\le x\le 1\}=2\int_0^1\big(1-g(x)\big)\,\mathrm{d}x.$$

要对 g 积分，可代入 $u=2-x$，于是 $x=2-u$，而

$$x^2-2x+2=(2-u)^2-2(2-u)+2=u^2-2u+2,\qquad g=\frac{u^2-2u+2}{u}=u-2+\frac{2}{u}.$$

当 x 由 0 变到 1 时，u 由 2 变到 1，而 $\mathrm{d}x=-\mathrm{d}u$，所以

$$\begin{aligned}\int_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x&=\int_1^2\left(u-2+\frac{2}{u}\right)\mathrm{d}u=\left[\tfrac{1}{2}u^2-2u+2\ln u\right]_1^2\\&=(2-4+2\ln 2)-\left(\tfrac{1}{2}-2\right)=2\ln 2-\tfrac{1}{2}.\end{aligned}$$

因此

$$\mathrm{P}(\angle ABC \text{ 为钝角})=2\left(1-2\ln 2+\tfrac{1}{2}\right)=3-4\ln 2,$$

正如所求。

验算

- 数值上，$3-2\sqrt{2}\approx 0.1716$，$3-4\ln 2\approx 0.2274$。以 10^6 次试验进行蒙地卡罗模拟（Monte Carlo simulation），结果约为 0.1719 和 0.2278。
- 两个答案都在 0 与 1 之间。在 (ii) 中，曲线在两端都碰到 $y=1$：在 $x=0$ 时边 BC 消失，在 $x=1$ 时边 AB 消失，所以两者都是退化情况，正如所料。
- 以辛普森法则（Simpson's rule）计算 $\int_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x$，得 0.886294，与 $2\ln 2-\frac{1}{2}$ 吻合。

常见错误

- 在 (i) 中忘记取条件：出现钝角三角形的无条件概率是 $\frac{3}{2}-\sqrt{2}$，只有所求答案的一半。
- 在 (ii) 中，余弦定理用错了边。位于 B 的角的对边是 $CA=y$，而不是 AB。
- 忘记 R 上的密度是 2 而不是 1，结果答案只有应有的一半。

STEP 之外

把概率化为长度或面积，就是*几何概率*（geometric probability），而随机折断一根棒正是其中一个经典问题：在两个独立的均匀随机点把棒折断，可以组成三角形的机会是 $\frac{1}{4}$。第 (ii) 部分让你初次接触连续联合分布（continuous joint distribution），当中的概率是联合密度在某个区域上的二重积分（double integral）。Grimmett 与 Welsh 的 *Probability: An Introduction*（概率入门教科书）有讲解联合密度，并收录了好几道这类题目。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。