详细解答

# STEP III 1990，第 14 题

力学 · 力系

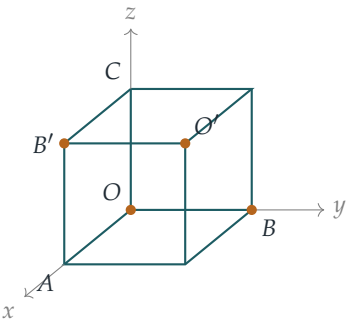
> **STEP III 1990，第 14 题**
>
> 继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：
>
> step.maths.org/questions/90-s3-q14

## 关键思路

作用于刚体(rigid body)上的力系,归根究底只由两个向量决定:合力(resultant)$\mathbf{R} = \sum \mathbf{F}_i$,以及对某一选定点的力矩（moment）$\mathbf{G}_P = \sum(\mathbf{r}_i - \mathbf{p}) \times \mathbf{F}_i$。把基点由 $O$ 移到 $P$，力矩按一条简单的规则改变：$\mathbf{G}_P = \mathbf{G}_O - \mathbf{p} \times \mathbf{R}$。本题每一部分，都是把这条规则用于不同的 $P$。

## 解答

把正方体视为边长为 $a$ 的刚体，于是 $A = (a,0,0)$，$B = (0,a,0)$，$C = (0,0,a)$，而与 $B$ 相对的顶点是 $B' = (a,0,a)$。



**求 $\lambda$、$\mu$、$\nu$**

作用于 $O$ 的力对 $O$ 没有力矩，所以只需考虑其余三个力。利用 $(x,y,z)\times(p,q,r)=(yr-zq,\ zp-xr,\ xq-yp)$：

$$\overrightarrow{OO'}\times\begin{pmatrix}\lambda\\0\\1\end{pmatrix}=a\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}\lambda\\0\\1\end{pmatrix}=a\begin{pmatrix}1\\\lambda-1\\-\lambda\end{pmatrix},$$

$$\overrightarrow{OB}\times\begin{pmatrix}-1\\0\\2\end{pmatrix}=a\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}-1\\0\\2\end{pmatrix}=a\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix},$$

$$\overrightarrow{OB'}\times\begin{pmatrix}1\\\mu\\\nu\end{pmatrix}=a\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1\\\mu\\\nu\end{pmatrix}=a\begin{pmatrix}-\mu\\1-\nu\\\mu\end{pmatrix}.$$

相加后，对 $O$ 的总力矩为 $a\,(3-\mu,\ \lambda-\nu,\ 1-\lambda+\mu)$。令每个分量为零，得 $\mu=3$，继而 $\lambda=1+\mu=4$，再得 $\nu=\lambda=4$：

$$\lambda=4,\qquad \mu=3,\qquad \nu=4.$$

以上结果完全不取决于 $\alpha,\beta,\gamma$，而合力为

$$\mathbf{R}=\begin{pmatrix}\alpha+\lambda-1+1\\\beta+\mu\\\gamma+1+2+\nu\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha+4\\\beta+3\\\gamma+7\end{pmatrix},\qquad \mathbf{G}_O=\mathbf{0}.$$

**第 (i) 部分**

当 $\alpha=\beta=\gamma=0$ 时，$\mathbf{R}=(4,3,7)$。两个力系等效（equivalent），是指它们有相同的合力，并且对某一点（因而对每一点）有相同的力矩。所以作用于 $B$ 的单一力必定就是 $\mathbf{R}$ 本身，而力偶（couple）必须等于原力系对 $B$ 的力矩：

$$\mathbf{G}_B=\mathbf{G}_O-\overrightarrow{OB}\times\mathbf{R}=\mathbf{0}-a\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}4\\3\\7\end{pmatrix}=-a\begin{pmatrix}7\\0\\-4\end{pmatrix}=a\begin{pmatrix}-7\\0\\4\end{pmatrix}.$$

? **想一想** 为甚么对 $B$ 的力矩等于 $\mathbf{G}_O-\overrightarrow{OB}\times\mathbf{R}$?

对每一个力，$(\mathbf{r}_i-\mathbf{b})\times\mathbf{F}_i=\mathbf{r}_i\times\mathbf{F}_i-\mathbf{b}\times\mathbf{F}_i$；对 $i$ 求和便得 $\mathbf{G}_O-\mathbf{b}\times\mathbf{R}$。

因此，等效力系是一个作用于 $B$ 的力 $(4,3,7)$，连同一个力矩为 $a(-7,0,4)$ 的力偶。验算一下：作用于 $B$ 的力加上这个力偶，对 $O$ 的力矩等于 $a(7,0,-4)+a(-7,0,4)=\mathbf{0}$，正如所料。

### 第 (ii) 部分

现在 $\mathbf{R} = (2+4,\ 3+3,\ 2+7) = (6,6,9) = 3(2,2,3)$，而 $\mathbf{G}_O = \mathbf{0}$ 依然成立。在位置向量（position vector）为 $\mathbf{r} = (x,y,z)$ 的点 $P$，

$$\mathbf{G}_P = \mathbf{G}_O - \mathbf{r}\times\mathbf{R} = -\mathbf{r}\times\mathbf{R}.$$

由于 $\mathbf{R}\neq\mathbf{0}$，上式为零当且仅当 $\mathbf{r}$ 与 $\mathbf{R}$ 平行（或 $\mathbf{r}=\mathbf{0}$）。所以所求轨迹（locus）是通过 $O$、方向为 $(2,2,3)$ 的直线：

$$\frac{x}{2} = \frac{y}{2} = \frac{z}{3}.$$

从物理上看，整个力系等效于沿这条直线作用的单一力 $(6,6,9)$。

当正方体平移（不带转动）时，每一点的位移都相同，所以各力所作的功（work done）是 $\mathbf{R}\cdot\mathbf{s}$，其中 $\mathbf{s}$ 是位移。若沿该直线、朝 $(2,2,3)$ 的方向移动距离 $d$，则 $\mathbf{s} = \dfrac{d}{\sqrt{17}}(2,2,3)$，而

$$W = (6,6,9)\cdot\frac{d}{\sqrt{17}}(2,2,3) = \frac{51d}{\sqrt{17}} = 3\sqrt{17}\,d.$$

题目没有为这段距离命名；每单位距离所作的功是 $3\sqrt{17}\approx 12.37$ 个单位。由于 $\mathbf{R}$ 沿着这条直线，这其实就是 $|\mathbf{R}|\,d = \sqrt{36+36+81}\,d = \sqrt{153}\,d$，数值相同。（若沿直线反方向移动，则得 $-3\sqrt{17}\,d$。）

## 验算

- 取 $\lambda=4$、$\mu=3$、$\nu=4$，三个对 $O$ 的力矩分别是 $a(1,3,-4)$、$a(2,0,1)$ 和 $a(-3,-3,3)$，其和为零。
- 在 (ii) 中，取 $P=(2,2,3)$：$\mathbf{r}\times\mathbf{R} = (2,2,3)\times(6,6,9) = \mathbf{0}$。在 $P=(1,0,0)$，力矩为 $-(0,-9,6)\neq\mathbf{0}$。
- 以电脑用精确分数运算，核实了每一个力矩，检查了 (i) 中的等效力系对 20 个随机点的力矩均与原力系相同，并确认每单位距离所作的功为 $3\sqrt{17}\approx 12.369$。

## 常见错误

- 把 $\mathbf{r}\times\mathbf{F}$ 的次序弄错：次序颠倒，所有正负号都会反转。
- 把 (i) 中的力偶当作 $+\overrightarrow{OB}\times\mathbf{R}$。把力由 $O$ 移到 $B$，所需的补偿力偶带相反的符号。
- 逐一计算作用于不同顶点的各个力所作的功再相加。在纯平移中，只有合力才起作用。

## STEP 之外

作用于刚体上的任何力系，都可以化简为沿某条直线的单一力，连同一个绕同一条直线的力偶。这称为*力螺旋*（wrench），其螺距（pitch）为 $\mathbf{R}\cdot\mathbf{G}/|\mathbf{R}|^2$。在 (ii) 中螺距为零，所以力螺旋只是一个单一力，而零力矩轨迹就是它的作用线（line of action），即中心轴（central axis）。这些概念通往刚体动力学（rigid-body dynamics），以及机械人学中的旋量理论（screw theory）。Kleppner 与 Kolenkow 合著的 *An Introduction to Mechanics*（力学入门）以恰当的程度讲解力矩和刚体。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。