详细解答

STEP III 1990，第 13 题

力学 • 球内的运动

> **STEP III 1990，第 13 题**
>
> 继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：
>
> step.maths.org/questions/90-s3-q13

关键思路

整个过程分为两个阶段：先是在球面上作圆周运动（circular motion），直至法向反作用力（normal reaction）消失为止；然后是作为抛体（projectile）的自由飞行。离开球面的条件决定了离开一刻的速率，并可用 θ 表示；其后只需依照提示去做：把抛体重返球面的条件 $x^2 + y^2 = a^2$ 写成关于 t 的方程。由于离开条件令其中几项互相抵销，这条方程会化简得非常漂亮。

解答

模型

我们把 P 视为质点（particle），并把球面（半径 a）视为光滑（smooth），因此 P 与球面接触时，所受的力只有它的重量 mg 和指向 O 的法向反作用力 R。运动在通过 O 的一个铅垂平面内进行；我们取 O 为原点，x 轴为水平方向，y 轴铅垂向上，并设 P 沿球面的右边向上爬升。

P 若要离开球面，就必定是在高于 O 的水平之处离开：在该水平以下，重力沿 PO 的分量背向 O，所以当 P 仍在圆上运动时，R 在那里不可能为零。因此 $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$。

离开球面

设 P 的速率为 v 时，OP 与向上的铅垂线所成的角为 θ，于是 P 位于 $a\cos\theta$ 的高度（相对于 O 而言）。沿指向 O 的方向分解，重量在该方向的分量为 $mg\cos\theta$，所以

$$R + mg\cos\theta = \frac{mv^2}{a}.$$

P 在 $R = 0$ 时离开球面，所以在该刻

$$v^2 = ag\cos\theta.$$

（由能量守恒（conservation of energy）可知，抛射速率必须是 u，其中 $u^2 = v^2 + 2ga(1+\cos\theta) = ag(2+3\cos\theta)$，所以只要适当选取 u，$(0, \frac{\pi}{2})$ 内的每一个 θ 都可以达到。随着 P 向上爬升，v 减小，R 亦减小，所以 R 正是在这一点首次变为零。）

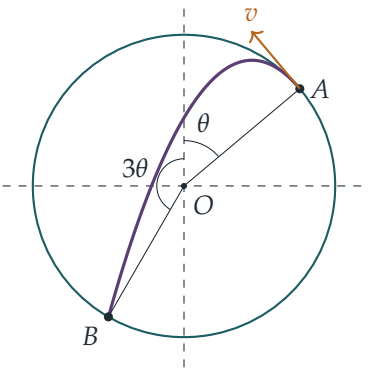
自由飞行

把离开的一刻记为 $t = 0$，此时 P 位于 $(a\sin\theta, a\cos\theta)$，其速度沿切线（tangent）方向，与 OP 垂直，并指向上方、越过球顶：

$$\text{速度} = v(-\cos\theta,\ \sin\theta).$$

此后只有重力作用，所以

$$x = a\sin\theta - vt\cos\theta, \qquad y = a\cos\theta + vt\sin\theta - \tfrac{1}{2}gt^2.$$



P 在 A 离开球面，并且（如下文所证）在 B 再次撞上球面。

P 位于球面上的条件是 $x^2 + y^2 = a^2$。展开后，关于 t 的常数项和一次项分别是

$$a^2\sin^2\theta + a^2\cos^2\theta = a^2 \qquad \text{及} \qquad -2avt\sin\theta\cos\theta + 2avt\cos\theta\sin\theta = 0,$$

所以

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 - a^2 &= v^2t^2\cos^2\theta + v^2t^2\sin^2\theta - gt^2\left(a\cos\theta + vt\sin\theta\right) + \tfrac{1}{4}g^2t^4 \\ &= \left(v^2 - ag\cos\theta\right)t^2 - gv\sin\theta\, t^3 + \tfrac{1}{4}g^2t^4 \\ &= gt^3\left(\tfrac{1}{4}gt - v\sin\theta\right), \end{aligned}$$

最后一步用了 $v^2 = ag\cos\theta$。

想一想 为甚么 $t = 0$ 是三重根（triple root），而不只是单根?

在离开的一刻，单靠重力就刚好提供了沿圆运动所需、指向 O 的加速度 v^2/a。因此抛物线起初不但与球面有相同的方向，而且有相同的曲率（curvature）：它先紧贴着球面，然后才向球内偏离。这就是为甚么除了 t 项之外，连 t^2 项也抵销了。

当 $0 < t < 4v\sin\theta/g$ 时，上式为负，所以 P 严格位于球内，而它下一次与球面相遇的时刻是

$$T = \frac{4v\sin\theta}{g}.$$

落点位置

在 $t = T$ 时，利用 $vT\sin\theta = 4v^2\sin^2\theta/g = 4a\cos\theta\sin^2\theta$ 和 $\frac{1}{2}gT^2 = 8v^2\sin^2\theta/g = 8a\cos\theta\sin^2\theta$，可得

$$y = a\cos\theta + 4a\cos\theta\sin^2\theta - 8a\cos\theta\sin^2\theta = a\cos\theta\left(1 - 4\sin^2\theta\right).$$

（这就是 $a\cos 3\theta$，因为 $\cos 3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta = \cos\theta(1 - 4\sin^2\theta)$；同样地 $x = -a\sin 3\theta$，所以撞击点 B 位于另一边、与向上的铅垂线成 3θ 角之处，正如图中所示。）

P 撞在低于 O 的水平之处，当且仅当 $y < 0$。由于 $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$，故 $\cos\theta > 0$，所以

$$y < 0 \iff 1 - 4\sin^2\theta < 0 \iff \sin\theta > \tfrac{1}{2} \iff \theta > \tfrac{\pi}{6},$$

最后一步成立，是因为 sin 在 $(0, \frac{\pi}{2})$ 上递增。当 $\theta = \frac{\pi}{6}$ 恰好成立时，P 撞上球面的位置恰好与 O 同一水平。所以 θ 必须超过的角是

$$\boxed{\theta = \frac{\pi}{6} = 30^\circ}$$

而每一个 θ 只要满足 $30^\circ < \theta < 90^\circ$，撞击点确实都低于 O 的水平。

验算

- $\theta = 60^\circ$：公式给出 $y = a\cos 180^\circ = -a$，所以 P 落回最低点，即抛射点。若取 $\theta = 45^\circ$，它落在与向上的铅垂线成 135° 之处；两者都有 $y < 0$，与预期相符。
- 当 $\theta \to 0$ 时，$T \to 0$ 且 $B \to A$：一个在球顶仅仅离开球面的质点，会立即落回球面上。
- 以数值模拟（逐步计算球面上的运动直至 $R = 0$，然后计算抛体运动直至它与球面相遇）检验 $\theta = 10^\circ, 25^\circ, 29^\circ, 30.5^\circ, 31^\circ, 45^\circ, 60^\circ, 80^\circ$ 各情况，结果与 $T = 4v\sin\theta/g$ 和 $y = a\cos 3\theta$ 吻合至小数点后四位；例如 $\theta = 31^\circ$ 给出 $y/a = -0.0523$。

常见错误

- 弄错速度的方向：速度与 OP 垂直，并且仍然向上、越过球顶，其分量为 $(-v\cos\theta,\ v\sin\theta)$，而不是 $(v\sin\theta,\ v\cos\theta)$。
- 忘记先代入 $v^2 = ag\cos\theta$ 才去解 $x^2 + y^2 = a^2$，结果得到一条棘手的四次方程（quartic），而不是简洁的因式分解（factorisation）。
- 把 $1 - 4\sin^2\theta < 0$ 两边相除时，没有指出 $\cos\theta > 0$（这是因为 P 在高于 O 的水平之处离开）。

STEP 之外

$t = 0$ 处的三重根，其实是关于**密切**（osculation）的一个陈述：抛物线与圆在离开点有相同的切线和相同的曲率，所以两者有二阶切触。曲率和密切圆（osculating circle）是曲线的微分几何（differential geometry）中的核心概念；在力学中，每当我们把加速度分解为切向和法向两部分时，它们都会再次出现。Kleppner 与 Kolenkow 所著的 *An Introduction to Mechanics*（力学入门教科书）对极坐标（polar coordinates）下的运动，以及这类受约束的运动，都有细致的论述。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。