详细解答

STEP III 1990，第 12 题

力学 • 移动楔上的质点

> **STEP III 1990，第 12 题**
>
> 继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：
>
> step.maths.org/questions/90-s3-q12

关键思路

质点下滑期间有两个量守恒：水平动量（horizontal momentum）（桌面光滑，所以没有水平方向的外力）和能量（所有表面都是光滑的）。这两条定律，加上质点相对于楔块始终沿斜面 AC 运动这一事实，就确定了所有速度。之后的反弹和飞行只是抛体运动（projectile motion），而楔块则以恒定速率滑行。

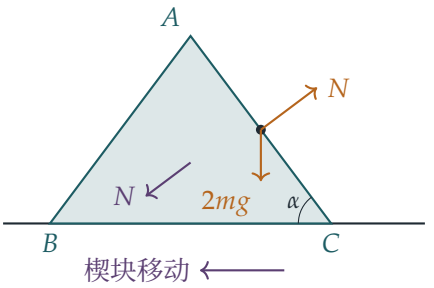
解答

建立模型

把质点视为质量为 $2m$ 的点质量（point mass），并把楔块（wedge）视为质量为 m 的刚体（rigid body）。所有接触面都是光滑的。在通过 A、B、C 的铅垂截面上考虑问题。取 B 为原点，$C = (6a, 0)$，$A = (3a, 4a)$。A 的高度是 $4a$，因为三角形是等腰三角形，$AB = AC = 5a$，而底边的一半是 $3a$。设 α 为角 ACB。则

$$\sin\alpha = \frac{4}{5}, \qquad \cos\alpha = \frac{3}{5}.$$

质点沿 AC 下滑，向 x 轴正方向运动，而楔块则向 x 轴负方向后退。



设 u 为质点相对于楔块的速率，方向沿 AC 向下。设 V 为楔块的速度，其方向是水平的。质点的速度等于楔块的速度加上质点相对于楔块的速度：

$$\mathbf{v}_P = \big(V + u\cos\alpha,\ -u\sin\alpha\big) = \big(V + \tfrac{3}{5}u,\ -\tfrac{4}{5}u\big).$$

下滑期间的动量与能量

外力只有重力和桌面的铅垂反作用力，所以水平动量守恒。它起初为零，因此

$$2m\big(V + \tfrac{3}{5}u\big) + mV = 0 \quad\Longrightarrow\quad V = -\tfrac{2}{5}u.$$

所以质点的速度是 $\big(\frac{1}{5}u,\ -\frac{4}{5}u\big)$，楔块的速度是 $-\frac{2}{5}u$。

> **想一想** 为甚么不能单独对质点使用能量守恒?

作用于质点的法向反作用力（normal reaction）垂直于斜面 AC，但斜面本身正在移动。因此质点的实际速度并不沿 AC 方向，而 N 对质点作功。只有整个系统的能量才守恒，因为这一对法向力所作的总功为零。

质点到达 AC 底部时，已下降了高度 $4a$。对整个系统应用能量守恒，得

$$\begin{aligned}\tfrac{1}{2}(2m)\Big(\tfrac{1}{25} + \tfrac{16}{25}\Big)u^2 + \tfrac{1}{2}m\cdot\tfrac{4}{25}u^2 &= 2mg\cdot 4a\\ \tfrac{19}{25}u^2 &= 8ga\\ u^2 &= \frac{200ga}{19}.\end{aligned}$$

质点自始至终都留在斜面上。按加速度分解各力，可知法向反作用力是常数 $N = \frac{10}{19}mg > 0$。

碰撞时各物体的位置

动量始终为零，所以系统的质心（centre of mass）没有水平运动。设质点到达桌面时，质点的水平位移为 x_P，楔块的水平位移为 x_W。则 $2m\,x_P + m\,x_W = 0$。相对于楔块，质点

由 A 走到 C，水平距离为 $3a$，所以 $x_P - x_W = 3a$。因此

$$x_P = a, \qquad x_W = -2a.$$

在该瞬间，质点位于 $x = 3a + a = 4a$，而顶角 C 位于 $6a - 2a = 4a$。两者在同一位置，这是必然的，因为质点刚好到达 C。

反弹与飞行

桌面固定而且光滑，而碰撞是完全弹性（perfectly elastic）的。所以质点的水平速度不变，铅垂速度则反向。它以速度 $\left(\frac{1}{5}u,\ \frac{4}{5}u\right)$ 离开桌面。它返回桌面所需的飞行时间为

$$T = \frac{2 \cdot \frac{4}{5}u}{g} = \frac{8u}{5g}.$$

飞行期间，它向右水平移动了距离 $\frac{1}{5}u \cdot T = \dfrac{8u^2}{25g}$。

质点离开楔块之后，楔块不再受水平力作用，所以它继续以速率 $\frac{2}{5}u$ 向左运动。在时间 T 内，它移动了 $\frac{2}{5}u \cdot T = \dfrac{16u^2}{25g}$。质点向右运动而楔块向左运动，所以质点不可能再与楔块相遇。

D 与 E 之间的距离是这两段距离之和，因为两者都由 $x = 4a$ 出发，并向相反方向运动：

$$DE = \frac{8u^2}{25g} + \frac{16u^2}{25g} = \frac{24u^2}{25g} = \frac{24}{25} \cdot \frac{200a}{19} = \frac{192}{19}\,a,$$

正如所求。

验算

- 碰撞时的总动能：$\frac{19}{25}mu^2 = \frac{19}{25} \cdot \frac{200}{19}mga = 8mga$。这等于所失去的位能。
- 动量：$2m \cdot \frac{1}{5}u + m \cdot \left(-\frac{2}{5}u\right) = 0$。
- 取 $a = g = m = 1$，以数值方法逐步计算运动，得 $DE \approx 10.1053$，而 $\frac{192}{19} = 10.10526\ldots$。

常见错误

- 把质点的速度当作沿 AC 方向。那只是它相对于移动中的楔块的速度。
- 单独对质点写出 $\frac{1}{2}(2m)u^2 = 2mg \cdot 4a$。这忽略了楔块的动能和 N 所作的功。
- 由 C 的原来位置量度 DE，而不是由碰撞点 $x = 4a$ 量度；在那一刻，质点和 C 都位于该处。

STEP 之外

在光滑桌面上滑动的楔块，是带有约束（constraints）的系统的经典例子。拉格朗日力学（Lagrangian mechanics）处理这类系统的方法，是选取适当的坐标（这里是楔块的位置和质点沿斜面下滑的距离），使约束力根本无须出现。这样，水平动量守恒便源于问题在水平平移下的对称性，这是诺特定理（Noether's theorem）的一个例子。Kleppner 与 Kolenkow 的 *An Introduction to Mechanics*（力学入门教科书）涵盖了运动参考系，以及多体系统中的动量守恒。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。