详细解答

STEP III 1990，第 11 题

力学 • 刚体转动

STEP III 1990，第 11 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

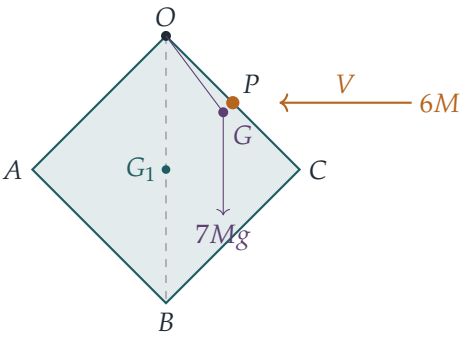
step.maths.org/questions/90-s3-q11

关键思路

碰撞在一瞬间发生，其间位于 O 的转轴会施加一个很大的冲力（impulsive force），所以线动量（linear momentum）并不守恒。不过这个冲量（impulse）作用于 O，因此对 O 没有力矩（moment）：在整个碰撞过程中，对转轴的角动量（angular momentum）守恒。碰撞之后，整个系统是一个绕固定轴转动的刚体（rigid body），只有重力作功，于是能量守恒（conservation of energy）便可告诉我们它能否越过最高点。

解答

我们把薄片（lamina）视为均匀的刚性正方形，把质点视为在碰撞一刻黏附在薄片上的点质量，并假设转轴光滑。取 O 为原点。当 OB 铅垂向下时，正方形的中心 G_1 位于深度 $\sqrt{2}\,a$ 处（即对角线 $2\sqrt{2}\,a$ 的一半），而 A 和 C 分别位于 OB 两侧、水平距离为 $\sqrt{2}\,a$ 之处，深度同样是 $\sqrt{2}\,a$。因此 OC 的中点 P 与 O 的水平距离为 $a/\sqrt{2}$，深度为 $a/\sqrt{2}$，并且 $OP = a$。



（图中所示的质点从右方飞来；稍后我们会看到，从左方飞来也会得到相同的答案。）

对转轴的转动惯量

对于边长为 $2a$ 的均匀正方形薄片，它对通过中心并垂直于薄片的轴的转动惯量（moment of inertia）是 $\frac{1}{12}M((2a)^2+(2a)^2)=\frac{2}{3}Ma^2$（根据垂直轴定理（perpendicular axis theorem），把薄片平面内两条轴的转动惯量相加，每条均为 $\frac{1}{3}Ma^2$）。由于 $OG_1=\sqrt{2}\,a$，根据平行轴定理（parallel axis theorem），

$$I_{\text{薄片}}=\tfrac{2}{3}Ma^2+M(\sqrt{2}\,a)^2=\tfrac{8}{3}Ma^2.$$

质点最后停在 P，与 O 相距 a，所以合成后的物体有

$$I=\tfrac{8}{3}Ma^2+6Ma^2=\tfrac{26}{3}Ma^2.$$

碰撞

> ? **想一想** 为甚么处理这次碰撞时不能使用线动量守恒?

因为转轴是固定的：要令 O 保持不动，转轴必须在碰撞期间向薄片施加一个冲量，而这个冲量是未知的。不过它的作用线通过 O，所以它对 O 的力矩为零，而重力在一瞬间内不会产生冲量。因此对转轴的角动量守恒。

在碰撞前的一刻，质点对 O 的角动量等于它的动量 $6MV$ 乘以由 O 至其（水平）运动路线的垂直距离，这个距离就是 P 的深度，即 $a/\sqrt{2}$。薄片此时静止。碰撞刚结束时，整个物体以角速率（angular speed）ω 转动，所以

$$\tfrac{26}{3}Ma^2\,\omega=6MV\cdot\frac{a}{\sqrt{2}}\qquad\Longrightarrow\qquad\omega=\frac{9V}{13\sqrt{2}\,a}.$$

于是紧接碰撞之后的动能（kinetic energy）为

$$\tfrac{1}{2}I\omega^2=\tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{26}{3}Ma^2\cdot\frac{81V^2}{338a^2}=\frac{27}{26}MV^2.$$

作完整的旋转

合成物体的质心（centre of mass）G（质量为 $7M$）相对于 O 的水平位移和深度分别是

$$\frac{M\cdot 0+6M\cdot\frac{a}{\sqrt{2}}}{7M}=\frac{3\sqrt{2}}{7}a,\qquad\frac{M\cdot\sqrt{2}\,a+6M\cdot\frac{a}{\sqrt{2}}}{7M}=\frac{4\sqrt{2}}{7}a,$$

所以 $OG=\frac{\sqrt{2}}{7}a\sqrt{3^2+4^2}=\frac{5\sqrt{2}}{7}a$。

这个物体是刚体，并且钉在 O 上，所以（与系在绳上的质点不同）它不可能“掉离”所走的圆形轨道；它能作完整的旋转，当且仅当它在势能（potential energy）最高的位置仍

有正的动能，而这个位置就是 G 在 O 正上方的时候。由起初在 O 之下深度 $\frac{4\sqrt{2}}{7}a$ 处，到在 O 之上高度 $\frac{5\sqrt{2}}{7}a$ 处，G 上升了

$$\frac{4\sqrt{2}}{7}a+\frac{5\sqrt{2}}{7}a=\frac{9\sqrt{2}}{7}a,$$

无论物体向哪一个方向转动都是如此，所以质点从哪一边飞来并无影响。碰撞之后只有重力作功（光滑的转轴不作功），所以根据能量守恒，我们需要

$$\frac{27}{26}MV^2>7Mg\cdot\frac{9\sqrt{2}}{7}a=9\sqrt{2}\,Mga,$$

即

$$\boxed{V^2>\frac{26\sqrt{2}}{3}ga.}$$

质量 M 被约去了，这是必然的，因为题目中每一个质量都是 M 的倍数。（若刚好取等号，物体只会缓缓趋近最高位置而永远不会越过它，所以这是严格不等式。）

验算

- 转动惯量、质心（它与向下铅垂线所成角的 tan 值为 $\frac{3}{4}$）以及动能系数 $\frac{27}{26}$ 均已用数值方法核实，其中第一项是在倾斜的正方形上以网格积分求得的。
- 取 $a=1.3$，$g=9.81$，以数值方法逐步求解运动方程 $I\ddot{\theta}=-7Mg\,x_G$：当 V^2 为 $\frac{26\sqrt{2}}{3}ga\approx 15.6$ 的 98% 时，物体会摆回来；而在 102% 时，它会转完一整圈，无论质点从哪一边飞来都是如此。
- 对能量作合理性检查：质点原有的 $3MV^2$ 动能之中，只有 $\frac{27}{26}MV^2$ 在碰撞后保留下来，这正符合完全非弹性碰撞（perfectly inelastic collision）应有的情况。

常见错误

- 在碰撞过程中使用线动量守恒：转轴会施加冲量，所以线动量并不守恒。
- 以距离 $OP=a$ 作为质点动量的力臂，而没有使用到其运动路线的垂直距离 $a/\sqrt{2}$。
- 忘记质点黏上之后质心已经偏离 OB，所以升至最高点的高度并不单单是原来深度的两倍。

STEP 之外

这是刚体绕固定轴转动的力学：由于转轴上有冲击反作用力，在碰撞中守恒的量是角动量，而不是线动量。一个精彩的延伸课题是撞击中心（centre of percussion）：在这一点上

施加打击，转轴完全不会产生冲击反作用力，这正是板球棒有“甜蜜点”的原因。Kleppner 与 Kolenkow 合著的 *An Introduction to Mechanics*（力学入门）对刚体转动和角冲量有细致的论述。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。