详细解答

STEP III 1990，第 10 题

纯数学 · 根与渐近近似

STEP III 1990，第 10 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/90-s3-q10

关键思路

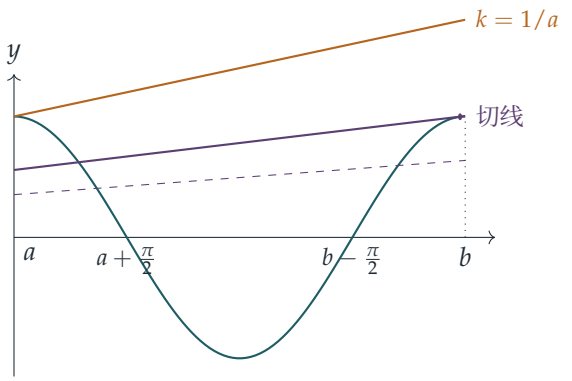
在题目所给的区间内，$\sin x$ 刚好走完一个完整周期，起点和终点都在峰顶，而直线 $y = kx$ 则恒为正，并缓缓上升。根只可能出现在 $\sin x > 0$ 的地方，而这样的地方分为两段：一段是 $\sin x$ 下降的部分（最多相交一次），另一段是 $\sin x$ 上升而且是凹函数（concave）的部分（最多相交两次）。值得留意的临界情况，是直线刚好与第二个拱形相切之时；把切点写成在区间右端点左方一小段距离 δ 处，相切条件便化为题目所给的方程。

解答

以下一律记

$$a = (4n+1)\frac{\pi}{2}, \qquad b = (4n+5)\frac{\pi}{2} = a + 2\pi,$$

于是区间就是 $a < x < b$。由于 $\sin a = \sin b = 1$，$\sin x$ 的图像由峰顶出发，在 $x = a + \frac{\pi}{2}$ 处降至 0，其后一直为负，直至 $x = a + \frac{3\pi}{2} = b - \frac{\pi}{2}$，然后再回升至 b 处的峰顶。



上图（按 $n = 1$ 的比例绘画，原点远在左方图外）以蓝绿色显示 $\sin x$，以琥珀色显示通过 $(a, 1)$ 的直线，以紫红色实线显示切线（tangent），另以虚线显示一条斜率较小、与曲线相交三次的直线。

根的可能数目

由于 $k > 0$ 且 $x > 0$, 故 $kx > 0$, 所以每个根都位于 $\sin x > 0$ 之处：不是在 $I_1 = (a,\, a + \frac{\pi}{2})$ 内，就是在 $I_2 = (b - \frac{\pi}{2},\, b)$ 内。

*在 I_1 上。*这里 $\sin x$ 严格递减（strictly decreasing），而 kx 严格递增（strictly increasing），所以 $kx - \sin x$ 严格递增，最多只有一个根。在右端点处 $kx - \sin x > 0$；在 $x = a$ 处其值为 $ka - 1$。因此，若 $ka < 1$，则 I_1 内恰有一个根；若 $ka \geq 1$，则没有根（此时在整个区间上 $kx - \sin x > 0$）。

*在 I_2 上。*设 $f(x) = \sin x - kx$。这里 $f''(x) = -\sin x < 0$，所以 f 是凹函数，在 I_2 上最多有两个零点。此外，f 在左端点处 $f < 0$，而 $f(b) = 1 - kb$。

- 若 $kb < 1$，则 f 由负变正，而凹函数在上升途中只能变号一次，所以恰有一个根。当 $kb = 1$ 时结论相同：此时 $f(b) = 0$ 且 $f'(b) = \cos b - k = -k < 0$，所以在 b 的左侧附近 $f > 0$，于是 I_2 内有一个根（b 本身这个零点不计在内）。
- 若 $kb > 1$，则 f 在两端均有 $f < 0$，所以根的数目是 0、1 或 2，分别对应 f 在 I_2 上的最大值为负、为零或为正。最大值为 0 即相切的情况：直线与拱形在某点 $t \in I_2$ 相切，设此时的斜率为 k_t。当 k 由很大的值逐渐减小时，直线随之下降，所以当 $k > k_t$ 时没有根，当 $k = k_t$ 时有一个根，而当 $\frac{1}{b} < k < k_t$ 时有两个根。

在切点处 $k_t t = \sin t < 1$ 且 $t > a$，所以 $k_t < 1/a$；又因为相切的情况满足 $kb > 1$，故 $k_t > 1/b$。把两段的结果合起来：

k 的范围	I_1 内的根数	I_2 内的根数	总数
$k \leq 1/b$	1	1	2
$1/b < k < k_t$	1	2	3
$k = k_t$	1	1	2
$k_t < k < 1/a$	1	0	1
$k \geq 1/a$	0	0	0

所以方程在该区间内可以有 0、1、2 或 3 个根，正如题目所求。

恰有一个根

由上表可见，恰有一个根的充要条件是 $k_t < k < \dfrac{1}{a} = \dfrac{2}{(4n+1)\pi}$。余下的工作是描述 k_t。

想一想 怎样把“直线与曲线相切”写成方程?

直线 $y = kx$ 与 $y = \sin x$ 在 $x = t$ 处相切，即两个图像在该处相交，而且斜率相等:

$$\sin t = k_t t, \qquad \cos t = k_t.$$

点 t 位于 I_2 内，所以可写 $t = b - \delta$，其中 $0 < \delta < \frac{\pi}{2}$。由于 $\sin b = 1$ 及 $\cos b = 0$,

$$\sin t = \sin(b - \delta) = \cos\delta, \qquad \cos t = \cos(b - \delta) = \sin\delta.$$

所以由斜率条件得 $k_t = \sin\delta$，而相交条件则变成

$$\cos\delta = \left((4n+5)\frac{\pi}{2} - \delta\right)\sin\delta.$$

因此，恰有一个根的条件是

$$\sin\delta < k < \frac{2}{(4n+1)\pi},$$

其中 δ 如上所述，这正是我们要证明的结果。

n 很大时的近似值

把关于 δ 的方程除以 $\sin\delta$（由于 $0 < \delta < \frac{\pi}{2}$，它不等于零):

$$\cot\delta = b - \delta, \qquad \text{即} \qquad \tan\delta = \frac{1}{b-\delta}.$$

由于 $\delta < \frac{\pi}{2}$，右边小于 $1/(b - \frac{\pi}{2})$，而当 n 很大时这个值很小。所以 δ 很小，$\tan\delta \approx \delta$，且 $b - \delta \approx b$，由此得

$$\delta \approx \frac{1}{b} = \frac{2}{(4n+5)\pi}.$$

要求下一级的近似值，可写 $\delta = \frac{1}{b} + \frac{c}{b^3}$，并在两边保留至 b^{-3} 的项。左边是 $\tan\delta = \delta + \frac{1}{3}\delta^3 + \cdots = \frac{1}{b} + \frac{c + \frac{1}{3}}{b^3} + \cdots$。右边是

$$\frac{1}{b-\delta} = \frac{1}{b}\left(1 - \frac{\delta}{b}\right)^{-1} = \frac{1}{b}\left(1 + \frac{\delta}{b} + \cdots\right) = \frac{1}{b} + \frac{1}{b^3} + \cdots,$$

其中在修正项里用了 $\delta \approx 1/b$。比较 b^{-3} 的项，得 $c + \frac{1}{3} = 1$，所以 $c = \frac{2}{3}$，于是

$$\delta \approx \frac{1}{b} + \frac{2}{3b^3} = \frac{2}{(4n+5)\pi} + \frac{16}{3(4n+5)^3\pi^3}.$$

（等价的做法是：由 $\delta = 1/b$ 出发，把迭代（iteration）$\delta \mapsto \arctan\frac{1}{b-\delta}$ 进行一步，得到 $\arctan\frac{b}{b^2-1}$，它的展开式与上式相同。）由此可知，k 的区间的下端是 $\sin\delta \approx \frac{1}{b} + \frac{1}{2b^3}$。

验算

- 当 $n=1$ 时，以数值方法解 $\cos\delta=(\frac{9\pi}{2}-\delta)\sin\delta$ 得 $\delta=0.070973$，而 $1/b=0.070736$ 及 $1/b+2/(3b^3)=0.070971$：改良后的近似值准确了约 150 倍。当 $n=10$ 时，误差降至约 5×10^{-10}。
- 取 $n=1,2,3,5$，并从表中每一行各取一个 k 值，在细密的格点上数算 $kx-\sin x$ 的变号次数，所得的根数 $2,3,1,0$ 与预测完全吻合；而在 $\sin\delta$ 与 $2/((4n+1)\pi)$ 之间随机选取 k，则每次都得到一个根。

常见错误

- 忘记了相切的情况，或者把 $1/b$、k_t 和 $1/a$ 的大小次序弄错，以致根的数目数错。
- 在第二级近似中只用 $\tan\delta\approx\delta$，结果得到 $\delta\approx b/(b^2-1)\approx1/b+1/b^3$。$\tan\delta$ 中的 $\frac{1}{3}\delta^3$ 项与修正项属同一阶，必须保留。

STEP 之外

当方程含有一个很小或很大的参数时，逐步求出其根越来越精确的近似值，这就是*渐近分析*（asymptotic analysis）：把一个以 $1/b$ 的幂写成的级数代入方程，然后比较系数，做法与这里完全一样。把同样的想法应用于 $\tan x=x$，便可描述该方程的大根，这些根会在热传导和振动问题中出现。如想进一步了解这类展开式背后的分析学，可参阅 Bartle 与 Sherbert 的 *Introduction to Real Analysis*（实分析入门教材）；Siklos 的 *Advanced Problems in Mathematics* 则有更多 STEP 风格的练习。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。