详细解答

STEP III 1990，第 1 题

纯数学 · 倍角与多项式的根

STEP III 1990，第 1 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/90-s3-q1

关键思路

九等于 3×3，所以只要把正切的三倍角公式（triple-angle formula）用两次，就可以得到 $\tan 9\theta$。这比展开 $(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)^9$ 省事得多。因式分解后的形式还告诉我们，在 $\theta=\pi/9,\,2\pi/9,\,4\pi/9$ 时是哪一个因式等于零：这些角正好是令 $\tan^2 3\theta=3$ 的角。由此得出一个以 $u=\tan^2\theta$ 为未知数的三次方程（cubic），余下的工作就交给韦达公式（Vieta's formulas，即多项式的根与系数之间的关系）。

解答

$\tan 9\theta$ 的公式

设 $t=\tan\theta$ 及 $T=\tan 3\theta$。三倍角公式可由 $\tan(2\theta+\theta)$ 推出，亦可由棣美弗定理（de Moivre's theorem）取 $n=3$ 得出，它给出

$$T=\frac{3t-t^3}{1-3t^2}=\frac{t(t^2-3)}{3t^2-1},\qquad \tan 9\theta=\frac{3T-T^3}{1-3T^2}=\frac{T(3-T^2)}{1-3T^2}.$$

现在把 $3-T^2$ 和 $1-3T^2$ 都写成以 $(1-3t^2)^2$ 为公分母的形式：

$$\begin{aligned}(1-3t^2)^2(3-T^2)&=3(1-3t^2)^2-t^2(3-t^2)^2\\&=(3-18t^2+27t^4)-(9t^2-6t^4+t^6)\\&=-(t^6-33t^4+27t^2-3),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(1-3t^2)^2(1-3T^2)&=(1-3t^2)^2-3t^2(3-t^2)^2\\&=(1-6t^2+9t^4)-(27t^2-18t^4+3t^6)\\&=-(3t^6-27t^4+33t^2-1).\end{aligned}$$

两式相除时，因子 $-(1-3t^2)^{-2}$ 互相约去，所以

$$\tan 9\theta = \frac{t(t^2-3)}{3t^2-1} \cdot \frac{t^6-33t^4+27t^2-3}{3t^6-27t^4+33t^2-1},$$

这就是所求的结果。

若改用棣美弗定理，则 $\tan 9\theta = \operatorname{Im}(1+\mathrm{i}t)^9 / \operatorname{Re}(1+\mathrm{i}t)^9$。这样便要再验证

$$9t-84t^3+126t^5-36t^7+t^9 \quad \text{和} \quad 1-36t^2+126t^4-84t^6+9t^8$$

确实可以分解成上面的分子和分母。它们的确可以，但经由 $\tan 3\theta$ 这条路，因式分解是现成的，不费工夫。

三次方程

设 $P(t) = t^6-33t^4+27t^2-3$。上面第一个计算表明

$$3-\tan^2 3\theta = -\frac{P(t)}{(1-3t^2)^2} \qquad \text{只要} 3t^2 \neq 1.$$

现在取 $\theta = \pi/9,\ 2\pi/9,\ 4\pi/9$。这时 $3\theta = \pi/3,\ 2\pi/3,\ 4\pi/3$，而每一个情况都有 $\tan 3\theta = \pm\sqrt{3}$，所以 $\tan^2 3\theta = 3$。每一个情况下 3θ 都不是 $\pi/6$ 的奇数倍，所以 $3t^2 \neq 1$（否则 $\tan 3\theta$ 便没有定义）。因此，对这三个角都有 $P(\tan\theta) = 0$。

在 $(0, \pi/2)$ 之内，这些正好是令 $\tan 9\theta = 0$ 的原因在于因式 P，而不在于 t 或 t^2-3 的角。事实上，$t \neq 0$，而且因为 $\theta \neq \pi/3$，所以 $t^2 \neq 3$。

> **想一想** 我们怎样知道这三个数就是该三次方程的全部根，而且没有重根？

令 $u = t^2$。$\tan^2(\pi/9)$、$\tan^2(2\pi/9)$、$\tan^2(4\pi/9)$ 每一个都是

$$u^3-33u^2+27u-3 = 0.$$

的根。这三个值互不相同，因为 tan 在 $(0, \pi/2)$ 上取正值且严格递增（strictly increasing），而 $\pi/9 < 2\pi/9 < 4\pi/9 < \pi/2$。三次方程最多有三个根，所以这三个数正好就是它的全部根。这就是所求的整数系数三次方程。

乘积

根据韦达公式，$u^3-33u^2+27u-3$ 的根之积是 3：

$$\tan^2\left(\tfrac{\pi}{9}\right)\tan^2\left(\tfrac{2\pi}{9}\right)\tan^2\left(\tfrac{4\pi}{9}\right) = 3.$$

三个角都在 $(0, \pi/2)$ 之内，所以每个正切值都是正数，我们取正平方根：

$$\tan\left(\tfrac{\pi}{9}\right)\tan\left(\tfrac{2\pi}{9}\right)\tan\left(\tfrac{4\pi}{9}\right) = \sqrt{3}.$$

六次方之和

设三个根为 u_1, u_2, u_3。由该三次方程可知

$$e_1 = u_1 + u_2 + u_3 = 33, \qquad e_2 = u_1u_2 + u_2u_3 + u_3u_1 = 27, \qquad e_3 = u_1u_2u_3 = 3.$$

我们要求的是 $u_1^3 + u_2^3 + u_3^3$，也就是三个正切值的六次方之和。

> **想一想** 不把根求出来，怎样由 e_1, e_2, e_3 得到立方和?

每个根都满足 $u_i^3 = 33u_i^2 - 27u_i + 3$。把这三条等式相加，得

$$\sum u_i^3 = 33\sum u_i^2 - 27\sum u_i + 9.$$

这里 $\sum u_i = 33$，而

$$\sum u_i^2 = e_1^2 - 2e_2 = 1089 - 54 = 1035.$$

因此

$$\begin{aligned}\sum u_i^3 &= 33 \times 1035 - 27 \times 33 + 9\\ &= 34155 - 891 + 9\\ &= 33273.\end{aligned}$$

也就是说，

$$\tan^6\left(\tfrac{\pi}{9}\right) + \tan^6\left(\tfrac{2\pi}{9}\right) + \tan^6\left(\tfrac{4\pi}{9}\right) = 33273,$$

正如所求。等价地，$\sum u_i^3 = e_1^3 - 3e_1e_2 + 3e_3 = 35937 - 2673 + 9$。

验算

- 以数值计算，$\tan^2(\pi/9) \approx 0.1325$、$\tan^2(2\pi/9) \approx 0.7041$ 及 $\tan^2(4\pi/9) \approx 32.163$。它们的和是 33.000，积是 3.000。
- 三个正切值的积是 $1.7320508\ldots = \sqrt{3}$。
- 上述三个值的立方和是 33273.0。它几乎全部来自 $\tan^6(4\pi/9) \approx 33272.4$。
- 随机取数千个 θ 的值，$\tan 9\theta$ 的公式与计算机的结果吻合至约十二位有效数字。
- 简单情况：取 $t = 1$，即 $\theta = \pi/4$。公式给出 $\frac{1\cdot(-2)(-8)}{2\cdot 8} = 1 = \tan(9\pi/4)$。

常见错误

- 未先检查 $3t^2 \neq 1$（或分母不为零），就断定那个六次因式等于零。

- 把乘积取为 $-\sqrt{3}$。每个角都是锐角，所以每个正切值都是正数。
- 写成 $\sum u_i^3 = e_1^3 - 3e_1e_2$ 而漏掉 $+3e_3$ 一项，结果得出 33264。

STEP 之外

三次多项式 $u^3 - 33u^2 + 27u - 3$ 没有有理根，所以它在 $\mathbb{Q}$ 上不可约（irreducible）。它又有三个实根。伽罗华理论（Galois theory）表明，这类三次多项式的根不能单靠实数根式表示出来（即所谓*不可约情形*（casus irreducibilis））。正因如此，像 $\tan^2(\pi/9)$ 这样的三角表达式才是写出这些根的自然方式。至于根的幂和，一般由牛顿恒等式（Newton's identities）支配。想了解棣美弗定理的几何一面，可读 Needham 的 *Visual Complex Analysis*（以图像方式讲解复分析）。代数方面，可读 Allenby 的 *Rings, Fields and Groups*（环、域与群的入门书）。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。