详细解答

STEP II 1990，第 9 题

纯数学 · 极坐标曲线与弧长

STEP II 1990，第 9 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/90-s2-q9

关键思路

两条曲线都以 θ 表示 r，所以可以逐条射线比较：从原点出发的每条半直线上，抛物线（parabola）恰好有一点，而这一点不是在心脏线（cardioid）之内，就是在其外。这样立刻就知道抛物线在哪里进入和离开心脏线。至于长度，心脏线最好保留极坐标（polar）形式（其弧长（arc length）的被积函数（integrand）用半角恒等式（half-angle identity）便可大幅化简），而抛物线则用直角坐标（Cartesian）形式容易得多。

解答

两条曲线

对抛物线而言，$r + r\cos\theta = 1$ 即 $r = 1 - x$。两边平方，得 $x^2 + y^2 = (1-x)^2$，所以

$$y^2 = 1 - 2x.$$

这是一条焦点（focus）在原点、顶点（vertex）在 $(\frac{1}{2}, 0)$、开口向左的抛物线。原点位于它凹的一侧，即 $y^2 < 1 - 2x$ 的一侧；我们称这一侧为抛物线的内部。

心脏线 $r = 4(1+\cos\theta)$ 的尖点（cusp）在原点（当 $\theta = \pi$ 时），并在 $\theta = 0$ 时到达 $x = 8$。

两曲线的交点

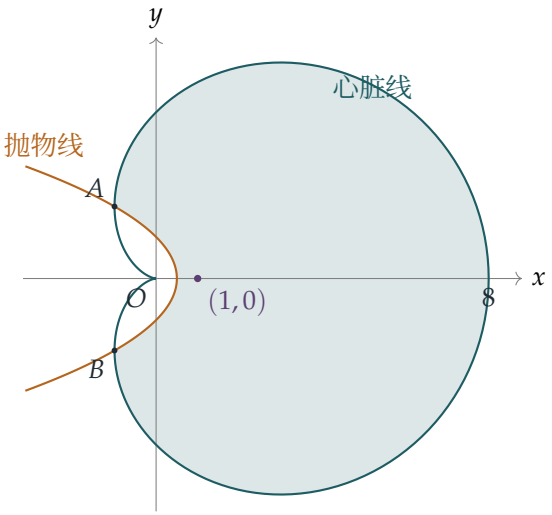
固定一个方向 θ，其中 $-\pi < \theta < \pi$，使得 $1 + \cos\theta > 0$。在这条射线上，抛物线与原点的距离为 $1/(1+\cos\theta)$，心脏线的边界与原点的距离为 $4(1+\cos\theta)$，而心脏线的内部就是射线上位于边界之前的那一段。所以抛物线上的点在心脏线之内，当且仅当

$$\frac{1}{1+\cos\theta} < 4(1+\cos\theta) \iff (1+\cos\theta)^2 > \tfrac{1}{4} \iff \cos\theta > -\tfrac{1}{2} \iff |\theta| < \tfrac{2\pi}{3},$$

其中我们乘以正数 $1+\cos\theta$，并取了正平方根。等号在 $\theta=\pm\frac{2\pi}{3}$ 时成立，此时 $r=2$，得出两个交点

$$A=(-1,\sqrt{3}),\qquad B=(-1,-\sqrt{3}).$$

所以抛物线在心脏线之内的部分是一段连续不断的弧，由 B 经顶点 $(\frac{1}{2},0)$ 到 A，其余部分全在心脏线之外。这段弧连接心脏线边界上的两点，因此把心脏线的内部分成两部分：一部分在抛物线之内（包含原点，以心脏线在尖点附近的小环为边界），另一部分在抛物线之外（以心脏线外侧的大弧为边界）。



（草图中可见一个巧妙的细节：$x=4(1+\cos\theta)\cos\theta=(2\cos\theta+1)^2-1\geq -1$，所以 A 和 B 也是心脏线上最左边的点。）

边界的长度

$r=1,\theta=0$ 所表示的点是 $(1,0)$。它在心脏线之内 $(1<8)$，又在抛物线之外 $(0^2>1-2)$，所以位于阴影部分。这部分的边界由心脏线的弧 $-\frac{2\pi}{3}\leq\theta\leq\frac{2\pi}{3}$ 和抛物线由 B 到 A 的弧组成。

心脏线的弧。在极坐标中，$\mathrm{d}s=\sqrt{r^2+(\mathrm{d}r/\mathrm{d}\theta)^2}\,\mathrm{d}\theta$。这里 $\mathrm{d}r/\mathrm{d}\theta=-4\sin\theta$，所以

$$r^2+\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta}\right)^2=16(1+2\cos\theta+\cos^2\theta+\sin^2\theta)=32(1+\cos\theta)=64\cos^2\tfrac{\theta}{2}.$$

? **想一想** 我们可以直接写 $\sqrt{64\cos^2(\theta/2)}=8\cos(\theta/2)$ 吗?

可以，但全因为在整个范围内 $\cos\frac{\theta}{2}\geq 0$：当 $|\theta|\leq\frac{2\pi}{3}$ 时，有 $|\frac{\theta}{2}|\leq\frac{\pi}{3}$。利用图形对 x 轴的对称性，

$$L_{\text{心脏线}}=2\int_0^{2\pi/3}8\cos\tfrac{\theta}{2}\,\mathrm{d}\theta=32\left[\sin\tfrac{\theta}{2}\right]_0^{2\pi/3}=32\cdot\tfrac{\sqrt{3}}{2}=16\sqrt{3}.$$

*抛物线的弧。*以 y 为参数（parameter）：$x = \frac{1}{2}(1-y^2)$，所以 $\mathrm{d}x/\mathrm{d}y = -y$，而 $\mathrm{d}s = \sqrt{1+y^2}\,\mathrm{d}y$，其中 y 由 $-\sqrt{3}$ 变到 $\sqrt{3}$。由对称性，

$$L_{\text{抛物线}} = 2\int_0^{\sqrt{3}} \sqrt{1+y^2}\,\mathrm{d}y.$$

设 $y = \sinh u$，$\mathrm{d}y = \cosh u\,\mathrm{d}u$，被积函数变成 $\cosh^2 u = \frac{1}{2}(1+\cosh 2u)$，所以

$$\int \sqrt{1+y^2}\,\mathrm{d}y = \tfrac{1}{2}u + \tfrac{1}{4}\sinh 2u = \tfrac{1}{2}(\operatorname{arsinh} y + y\sqrt{1+y^2}) + C.$$

当 $y = \sqrt{3}$ 时，$\sqrt{1+y^2} = 2$，而 $\operatorname{arsinh}\sqrt{3} = \ln(\sqrt{3}+2)$，所以

$$L_{\text{抛物线}} = \Big[\operatorname{arsinh} y + y\sqrt{1+y^2}\Big]_0^{\sqrt{3}} = \ln(2+\sqrt{3}) + 2\sqrt{3}.$$

*总长度。*两者相加，

$$L = 16\sqrt{3} + 2\sqrt{3} + \ln(2+\sqrt{3}) = 18\sqrt{3} + \ln(2+\sqrt{3}),$$

这正是所要求的结果。

验算

- 整条心脏线的长度是 $\int_{-\pi}^{\pi} 8\cos\frac{\theta}{2}\,\mathrm{d}\theta = 32$，而我们所用的外侧弧长 $16\sqrt{3} \approx 27.71$ 占了其中大部分，与草图吻合：尖点附近的小环长度为 $32 - 16\sqrt{3} \approx 4.29$。
- 抛物线的弧长约为 4.78，比由 B 到顶点 $(\frac{1}{2},0)$ 再到 A 的两条直线段的总长度 $2\sqrt{1.5^2+3} \approx 4.58$ 稍长，这是理所当然的。
- 数值上，对两条曲线的极坐标弧长被积函数用中点法则（midpoint rule）作数值积分（quadrature），所得总和为 32.49387，与 $18\sqrt{3} + \ln(2+\sqrt{3}) \approx 32.49387$ 一致。

常见错误

- 选错了部分：$(1,0)$ 在抛物线之外（在其顶点 $x = \frac{1}{2}$ 的右方），所以它所在部分的边界用的是心脏线外侧的大弧，而不是尖点附近的小环。
- 用 $8\cos\frac{\theta}{2}$ 一口气把心脏线由 0 积分到 2π，但这个式子在 $\theta > \pi$ 时变成负数；被积函数应是 $8|\cos\frac{\theta}{2}|$。

STEP 之外

两条曲线都是圆锥曲线（conic）或蚶线（limaçon），写成以焦点或尖点为极点（pole）的形式；而 $r = \ell/(1+e\cos\theta)$ 正是圆锥曲线在轨道力学（orbital mechanics）中出现的

形式，太阳位于焦点。弧长公式 $\int \sqrt{r^2 + r'^2}\,\mathrm{d}\theta$ 是参数曲线（parametrised curve）长度 $\int |\mathbf{r}'(t)|\,\mathrm{d}t$ 的特殊情况，后者在大学一年级的向量微积分（vector calculus）中会进一步引出曲率（curvature）和线积分（line integral）。Kleppner 与 Kolenkow 的 *An Introduction to Mechanics*（力学导论）用圆锥曲线的极坐标形式推导出开普勒（Kepler）轨道。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。