详细解答

STEP II 1990，第 8 题

纯数学 · 分部积分法

> **STEP II 1990，第 8 题**
>
> 继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：
>
> step.maths.org/questions/90-s2-q8

关键思路

微分方程（differential equation）的每一项都是，或者几乎是，一个全导数（exact derivative）。由于 y 和 y' 在 $t=0$ 与 $t=1$ 取相同的值，这些全导数的积分都等于零。每一条关系式的做法，都是把方程乘以一个合适的函数，然后反复使用分部积分法（integration by parts），直至所有边界项（boundary term）都消失。不妨先列出能令边界项消失的事实：$x(0)=0$、$y(0)=y(1)$、$y'(0)=y'(1)$，以及（待我们证明之后）$x(1)=0$。

解答

第一条恒等式

由于 $x'=y$，被积函数（integrand）$xy=xx'$ 正是 $\frac{1}{2}x^2$ 的导数。所以

$$\int_0^1 x(t)\,y(t)\,\mathrm{d}t=\Big[\tfrac{1}{2}x(t)^2\Big]_0^1=\tfrac{1}{2}[x(1)]^2,$$

因为 $x(0)=\int_0^0 y(u)\,\mathrm{d}u=0$。这就是所要求的结果。

证明 $x(1)=0$

把 $(*)$ 的中间项写成全导数：

$$(y^2-1)\,y'=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big(\tfrac{1}{3}y^3-y\Big).$$

现在把 $(*)$ 由 0 到 1 逐项积分：

$$\Big[y'\Big]_0^1+\Big[\tfrac{1}{3}y^3-y\Big]_0^1+\int_0^1 y\,\mathrm{d}t=0.$$

第一个括号等于 $y'(1) - y'(0) = 0$，第二个括号等于零则是因为 $y(1) = y(0)$。根据 x 的定义，余下的积分就是 $x(1)$。因此 $x(1) = 0$。

关系式 $\int y^2 = \frac{1}{3}\int y^4$

把 $(*)$ 乘以 x，然后在 $[0,1]$ 上积分。这样会得到三个积分，我们逐一处理。

*最后一项。*由第一条恒等式和 $x(1) = 0$，可得

$$\int_0^1 x\,y\,\mathrm{d}t = \tfrac{1}{2}[x(1)]^2 = 0.$$

*y'' 项。*我们使用分部积分法，对 x 求导（于是 $x' = y$）：

$$\begin{aligned}\int_0^1 x\,y''\,\mathrm{d}t &= \Big[x\,y'\Big]_0^1 - \int_0^1 y\,y'\,\mathrm{d}t \\ &= x(1)y'(1) - x(0)y'(0) - \Big[\tfrac{1}{2}y^2\Big]_0^1 = 0,\end{aligned}$$

因为 $x(1) = x(0) = 0$ 而且 $y(1) = y(0)$。

想一想 我们应该怎样对 $x\,(y^2-1)\,y'$ 进行分部积分？应该对哪一个因子积分？

*中间项。*对因子 $(y^2-1)y'$ 积分（我们已经知道它是 $\frac{1}{3}y^3 - y$ 的导数），并对 x 求导：

$$\begin{aligned}\int_0^1 x\,(y^2-1)\,y'\,\mathrm{d}t &= \Big[x(\tfrac{1}{3}y^3 - y)\Big]_0^1 - \int_0^1 y(\tfrac{1}{3}y^3 - y)\,\mathrm{d}t \\ &= 0 - \tfrac{1}{3}\int_0^1 y^4\,\mathrm{d}t + \int_0^1 y^2\,\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

边界项消失，是因为 x 在两个端点都等于零。

把三部分相加，结果为零：

$$\int_0^1 y^2\,\mathrm{d}t - \tfrac{1}{3}\int_0^1 y^4\,\mathrm{d}t = 0, \qquad \text{即} \qquad \int_0^1 [y(t)]^2\,\mathrm{d}t = \tfrac{1}{3}\int_0^1 [y(t)]^4\,\mathrm{d}t,$$

这正是所要求的结果。

关系式 $\int y'^2 = \int y^2$

想一想 我们想得到 y'^2 的积分。乘以哪一个函数才会产生它？

对 $y\,y''$ 进行分部积分会产生 $-\int y'^2$，所以这次我们把 $(*)$ 乘以 y 再积分。逐项计算：

$$\int_0^1 y\,y''\,\mathrm{d}t = \Big[y\,y'\Big]_0^1 - \int_0^1 y'^2\,\mathrm{d}t = -\int_0^1 y'^2\,\mathrm{d}t,$$

$$\int_0^1 (y^3 - y)\,y'\,\mathrm{d}t = \Big[\tfrac{1}{4}y^4 - \tfrac{1}{2}y^2\Big]_0^1 = 0.$$

边界项 $y(1)y'(1) - y(0)y'(0)$ 等于零，因为 y 和 y' 的值都会重复。第二行等于零，是因为 $y(1) = y(0)$。余下的就是

$$-\int_0^1 y'^2\,\mathrm{d}t + \int_0^1 y^2\,\mathrm{d}t = 0, \qquad \text{所以} \qquad \int_0^1 [y'(t)]^2\,\mathrm{d}t = \int_0^1 [y(t)]^2\,\mathrm{d}t.$$

验算

第一条恒等式对任何 y 都成立。取 $y = \cos 3t + t^2 - 0.7e^t$，以数值积分（quadrature）计算可得 $\int_0^1 xy\,\mathrm{d}t \approx 0.338191$，与 $\frac{1}{2}x(1)^2$ 相等。

$(*)$ 并没有在时间 1 之后重复的非平凡解（non-trivial solution）（见下文）。不过，对于任何在时间 T 之后重复的解，同样的论证可以一字不改地套用到 $[0, T]$ 上。我们以数值方法对 $(*)$ 积分，直至解落在它的周期轨道（periodic orbit）上，其周期为 $T \approx 6.6633$。在一个周期内，我们求得 $\int y \approx 10^{-9}$、$\int y^2 \approx 13.72222$、$\frac{1}{3}\int y^4 \approx 13.72222$ 和 $\int y'^2 \approx 13.72228$，这些数值在步长误差范围内吻合。

常见错误

- 忘记第三部分需要用到 $x(1) = 0$。没有这个条件，$\int xy$ 和各个边界项都不会消失。
- 在中间项中对 x 积分，而不是对 $(y^2 - 1)y'$ 积分。正是利用了 $x' = y$，积分才能化简成 y 的幂。
- 说边界项等于零是“因为 $y(0) = 0$”。题目并没有给出这个条件。边界项消失，是因为在 0 和 1 处的值相等。

STEP 之外

方程 $(*)$ 是范德波尔振荡器（van der Pol oscillator），是自持振荡电路的经典模型。它只有一条周期轨道，而你所证明的关系式，就是沿一个循环的能量平衡。这些关系式还揭示了一个意想不到的事实。由于 $\int_0^1 y = 0$，由傅里叶级数（Fourier series）得出的维廷格（Wirtinger）不等式（又称庞加莱（Poincaré）不等式）给出 $\int_0^1 y'^2 \geq 4\pi^2 \int_0^1 y^2$。结合最后一条关系式，这就迫使 $y \equiv 0$。所以在时间 1 之后重复的解只有平凡解，因为真正的周期约为 6.66。想进一步了解周期轨道和极限环（limit cycle），可参阅 Boyce 与 DiPrima 的 *Elementary Differential Equations*（微分方程入门教材）。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。