详细解答

STEP II 1990，第 7 题

纯数学 · 微分方程

> **STEP II 1990，第 7 题**
>
> 继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：
>
> step.maths.org/questions/90-s2-q7

关键思路

以指数函数作试解（trial solution），可把时滞方程（delay equation）化为关于 p 的普通方程，因为时间平移只是把 e^{pt} 乘以一个常数。方程 $(*)$ 同时含有 p 和 e^{-p}，所以无法精确求解；但全式乘以 e^{p} 后，所有含 p 的部分都归到同一边：方程的根就是单一条曲线 $y=(p+1)\mathrm{e}^{p}$ 与水平线 $y=k$ 的交点。于是，数算根的个数就变成描绘一条曲线的问题。

解答

关于 p 的方程

设 $\mathrm{f}(t)=A\mathrm{e}^{pt}$，其中 $A\neq 0$（我们要的是非零解）。则 $\mathrm{f}'(t)=pA\mathrm{e}^{pt}$，而 $\mathrm{f}(t-1)=A\mathrm{e}^{p(t-1)}=\mathrm{e}^{-p}A\mathrm{e}^{pt}$，所以 (†) 变成

$$A\mathrm{e}^{pt}(p+1-k\mathrm{e}^{-p})=0 \quad \text{对所有}t.$$

由于 $A\neq 0$ 且 $\mathrm{e}^{pt}>0$，上式对所有 t 成立，当且仅当

$$p+1=k\mathrm{e}^{-p},$$

这正是 $(*)$。因此，这种形式的解存在，恰好是当 p 为 $(*)$ 的实根之时，而此时任何 A 都可以。

有多少个实根?

把 $(*)$ 乘以 $\mathrm{e}^{p}>0$，得到等价的方程

$$g(p)=k, \qquad \text{其中}g(p)=(p+1)\mathrm{e}^{p}.$$

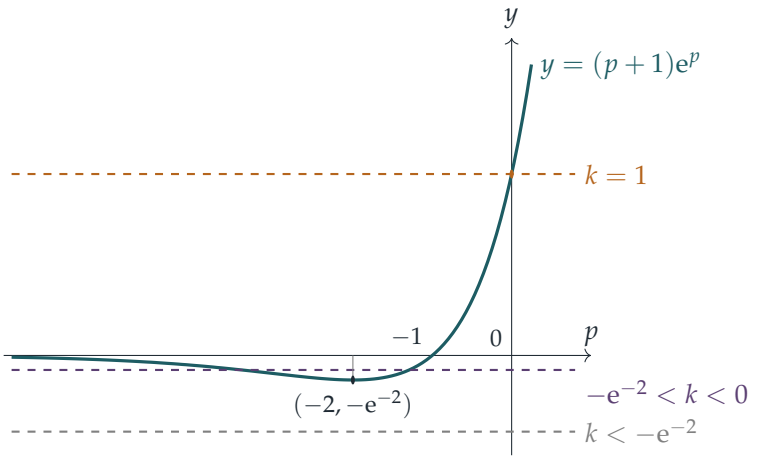
所以我们要数的是曲线 $y = g(p)$ 与水平线 $y = k$ 的交点数目。

> **想一想** $y = (p+1)\mathrm{e}^p$ 的图像是甚么模样？它在哪里取得最小值？两端的走势又如何？

求导得 $g'(p) = \mathrm{e}^p + (p+1)\mathrm{e}^p = (p+2)\mathrm{e}^p$，当 $p < -2$ 时为负，当 $p > -2$ 时为正。所以 g 在 $(-\infty, -2]$ 上递减，在 $[-2, \infty)$ 上递增，并有全域最小值（global minimum）

$$g(-2) = -\mathrm{e}^{-2}.$$

在两端：当 $p \to \infty$ 时 $g(p) \to \infty$；当 $p \to -\infty$ 时 $g(p) \to 0$（指数衰减压倒线性增长）；当 $p < -1$ 时因子 $p+1$ 为负，所以 g 从下方趋近 0。曲线只在 $p = -1$ 处穿过横轴，且 $g(0) = 1$。



从图中读出结论（上面的单调性（monotonicity）令论证严格）：

- $k > 0$：在 $(-\infty, -1]$ 上有 $g \le 0 < k$，而在 $(-1, \infty)$ 上 g 由 0 严格递增至 ∞，所以**恰有一个**根，且它满足 $p > -1$。
- $-\mathrm{e}^{-2} < k < 0$：在 $(-\infty, -2]$ 上，g 由接近 0 的值严格递减至 $-\mathrm{e}^{-2}$，所以它取值 k 一次；在 $[-2, -1]$ 上它由 $-\mathrm{e}^{-2}$ 严格递增至 0，所以它再取值 k 一次；当 $p > -1$ 时，$g > 0 > k$。因此有**两个**根，一个在 $(-\infty, -2)$ 内，一个在 $(-2, -1)$ 内。
- $k = -\mathrm{e}^{-2}$：直线与曲线在最低点相切，得出**唯**一的根 $p = -2$。
- $k < -\mathrm{e}^{-2}$：直线位于整条曲线之下，所以**没有**根。

所以 $(*)$ 的实根数目视乎 k 而为 0、1 或 2，正如题目所求；而形如 $A\mathrm{e}^{pt}$ 的解存在，恰好是当

$$k \ge -\mathrm{e}^{-2}, \quad k \ne 0.$$

（题目已排除 $k = 0$ 这个值；它会给出单一的根 $p = -1$。）

解在甚么时候衰减?

? **想一想** 哪些 p 会令 $Ae^{pt} \to 0$? 不解 $(*)$ 的话，怎样判断根相对于 0 的位置?

在 $A \neq 0$ 之下，$Ae^{pt} \to 0$（当 $t \to +\infty$）当且仅当 $p < 0$。我们从来不需要把根明确求出，只需知道它们相对于 0 的位置。

- 若 $-e^{-2} \leq k < 0$，每个根都在 $(-\infty, -1)$ 内（事实上当 $p \geq -1$ 时 $g \geq 0$，所以 $g(p) = k < 0$ 必然导致 $p < -1$）。所有这些解都会衰减。
- 若 $k > 0$，唯一的根位于 g 严格递增的范围内，所以 $p < 0 \iff g(p) < g(0) \iff k < 1$。当 $k = 1$ 时，根是 $p = 0$，给出常数解 $f = A$，它并不趋向零；当 $k > 1$ 时，根为正数，解会增长。

因此，当 $t \to +\infty$ 时解趋向零，恰好是当

$$-e^{-2} \leq k < 1, \quad k \neq 0.$$

验算

- $k = 1$：$p = 0$ 满足 $0 + 1 = 1 \cdot e^0$，而 $f = A$ 显然是 $f' + f - f(t-1) = 0$ 的解。这正好是衰减与增长之间的分界，合乎预期。
- $k = -e^{-2} \approx -0.1353$：$p = -2$ 给出 $-1 = -e^{-2}e^2$。数值上，$k = -0.13$ 给出两个根 $p \approx -2.311$ 和 $p \approx -1.742$，分别在 -2 的两侧，而 $k = -0.14$ 则没有根。
- 物理意义：没有反馈（feedback）时（$k \to 0$），系统是 $f' = -f$，衰减率为 $p = -1$，这正是 $|k|$ 很小时根所在的位置。强的正反馈（$k > 1$）会盖过阻尼（damping），令解增长。

常见错误

- 把 $y = p + 1$ 与 $y = ke^{-p}$ 画在一起比较，却忽略了当 $k < 0$ 时直线可以与曲线相交两次，也可以完全不相交；改用 $g(p) = (p+1)e^p$，相切（tangency）的条件会较容易找到。
- 遗漏端点 $k = -e^{-2}$；它确实给出一个（重）根 $p = -2$，因而有一个衰减的解。
- 把 $k = 1$ 纳入衰减的范围：$p = 0$ 给出的是常数解，而不是衰减的解。

STEP 之外

方程 (†) 是一个时滞微分方程（delay differential equation），而 $(*)$ 是它的特征方程（characteristic equation）。与一般的线性常微分方程（ODE）不同，它有无穷多个复数根 p，而通解是由所有这些根构成的，所以要完全稳定，就需要每个复数根的实部都是负数；这是控制理论（control theory）研究的课题。$(p+1)\mathrm{e}^p = k$ 的实根是朗伯（Lambert）W 函数的值：$p+1 = W(k\mathrm{e})$，而 $-\mathrm{e}^{-1}$（这里即 $k\mathrm{e} = -\mathrm{e}^{-1}$）正好是 W 的分支点（branch point）。关于线性常微分方程和特征方程，可参看 Boyce 与 DiPrima 的 *Elementary Differential Equations*。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。