详细解答

STEP II 1990，第 6 题

纯数学 · 整数不等式与分数

> **STEP II 1990，第 6 题**
>
> 继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：
>
> step.maths.org/questions/90-s2-q6

关键思路

一切都建基于整数（integer）的一个事实：整数之间的严格不等式（strict inequality）可以收紧 1。若 $a < b$，则 $b \geq a + 1$；若 $d < c$，则 $d \leq c - 1$。这样一来，(ii) 就变成一行便可完成的估计。其后各部分都是把 (ii) 应用于巧妙选取的整数：先把分数不等式中的分母消去，再把所得的整数不等式代回 (ii)。

解答

以下所有字母均代表正整数（positive integer）。

第 (i) 部分

由于 $b > a \geq 1$ 而 b 是整数，故 $b \geq 2$。两边乘以 $c > 0$ 得 $bc \geq 2c$。

由于 $c > 1$ 而 c 是整数，故 $c \geq 2$，所以 $2c = c + c \geq c + 2$。合起来便得 $bc \geq 2c \geq 2 + c$，正是所求。

第 (ii) 部分

因为两个不等式都是严格的，而各数均为整数，所以 $b \geq a + 1$ 及 $d \leq c - 1$。在前者用上 $c > 0$，在后者用上 $a > 0$，

$$\begin{aligned} bc - ad &\geq (a+1)c - a(c-1) \\ &= ac + c - ac + a \\ &= a + c. \end{aligned}$$

所以 $bc-ad \geq a+c$，而等号成立当且仅当 $b=a+1$ 及 $d=c-1$。

（这与 (i) 所用的“收紧 1”技巧相同；(i) 只是热身，之后不会再用到。）

第 (iii) 部分

利用 $b,d>0$，把两个不等式乘开：

$$\frac{a}{b}<p \iff a<bp, \qquad p<\frac{c}{d} \iff dp<c.$$

现在应用 (ii)，把 b 换成 bp，把 d 换成 dp（两者都是正整数）。所需的假设 $a<bp$ 和 $dp<c$ 正是我们已有的，所以

$$(bp)c-a(dp)\geq a+c, \qquad \text{即} \qquad (bc-ad)p\geq a+c.$$

第 (iv) 部分

消去分母（全部为正数），得到两个整数不等式：

$$aq<bp \qquad \text{及} \qquad dp<cq.$$

此外 $\frac{a}{b}<\frac{c}{d}$，所以 $ad<bc$，而 $bc-ad$ 是一个正整数；因此我们可以除以它而无须把任何不等号反转。

> **想一想** 应该由哪四个数来担当 (ii) 中 a,b,c,d 的角色？

我们有两个严格不等式，而 (ii) 正好需要两个：“第一个 $<$ 第二个”和“第四个 $<$ 第三个”。配对的自然方法有两种，每种各给出其中一个下界。

p 的下界。取 $aq<bp$ 作为“$a<b$”那个不等式，取 $dp<cq$ 作为“$d<c$”那个。把第 (ii) 部分应用于 $aq,\ bp,\ cq,\ dp$，得

$$(bp)(cq)-(aq)(dp)\geq aq+cq, \qquad \text{所以} \qquad pq(bc-ad)\geq q(a+c).$$

先除以 $q>0$，再除以 $bc-ad>0$，

$$p\geq \frac{a+c}{bc-ad}.$$

q 的下界。现在把角色对调：取 $dp<cq$ 作为“$a<b$”那个不等式，取 $aq<bp$ 作为“$d<c$”那个。把第 (ii) 部分应用于 $dp,\ cq,\ bp,\ aq$，得

$$(cq)(bp)-(dp)(aq)\geq dp+bp, \qquad \text{所以} \qquad pq(bc-ad)\geq p(b+d).$$

除以 $p>0$，再除以 $bc-ad>0$，

$$q\geq \frac{b+d}{bc-ad}.$$

两个下界都已证明。（第 (iii) 部分是第一个下界在 $q=1$ 时的特殊情况。）

介乎 $8/9$ 与 $9/10$ 之间的分数

取 $a = 8$、$b = 9$、$c = 9$、$d = 10$。那么

$$bc - ad = 81 - 80 = 1,$$

所以任何严格介乎 $8/9$ 与 $9/10$ 之间的分数 p/q（其中 p, q 为正整数，不论是否最简分数（lowest terms））都满足

$$p \geq \frac{8+9}{1} = 17, \qquad q \geq \frac{9+10}{1} = 19.$$

因此，小于 20 的分母必定恰好是 $q = 19$。这时我们需要

$$\frac{8}{9} < \frac{p}{19} < \frac{9}{10} \iff \frac{152}{9} < p < \frac{171}{10} \iff 16.88\ldots < p < 17.1,$$

所以 $p = 17$。而 $17/19$ 的确落在这个区间内，因为 $8 \cdot 19 = 152 < 153 = 9 \cdot 17$ 及 $17 \cdot 10 = 170 < 171 = 9 \cdot 19$。

因此，介乎 $8/9$ 与 $9/10$ 之间而分母小于 20 的分数只有

$$\frac{17}{19}.$$

由于下界 $q \geq 19$ 适用于分数的每一种写法，而不限于最简形式，所以像 $34/38$ 这类未约简的写法，也不可能以更小的分母混进来。

验算

- $17/19$ 是中间分数（mediant）$\frac{8+9}{9+10}$，而 (iv) 中两个下界都由它达到，这是个好兆头，说明这些下界是最佳的。
- 小数：$8/9 \approx 0.8889$，$17/19 \approx 0.8947$，$9/10 = 0.9$。
- 我们对不超过 29 的所有数值检验了 (i) 和 (ii)，以约 60,000 个随机例子检验了 (iii) 和 (iv)，并用穷举法（brute force）列出所有介乎 $8/9$ 与 $9/10$ 之间而 $q \leq 19$ 的 p/q：只有 $17/19$ 出现。

常见错误

- 在 (iv) 中除以该数之前，忘记说明 $bc - ad > 0$。
- 在最后一部分只用 p 的下界。它容许 q 最大为 19，但单凭它并不能排除更小的分母；真正起作用的是 q 的下界。
- 在 (iv) 中只从 (ii) 得到一个下界：第二个下界需要把两个不等式的角色对调。

STEP 之外

满足 $bc - ad = 1$ 的两个分数 $a/b < c/d$ 称为*法里相邻分数*（Farey neighbours），而本题证明了关于它们的关键事实：介乎两者之间而分母最小的分数，就是它们的中间分数 $\frac{a+c}{b+d}$。不断插入中间分数，便可建构出法里数列（Farey sequences）和 Stern–Brocot 树（Stern–Brocot tree）；它们把每个正有理数（rational）恰好列出一次，并与连分数（continued fractions）以及实数的最佳有理逼近（best rational approximations）密切相关。Davenport 的 *The Higher Arithmetic* 是阅读连分数与逼近理论的绝佳读物。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。