详细解答

STEP II 1990，第 5 题

纯数学 · 复数与圆

STEP II 1990，第 5 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/90-s2-q5

关键思路

在圆 $|z| = r$ 上，取共轭（conjugation）就等于做除法：$\bar{z} = r^2/z$。这样一来，“这个比是纯虚数（purely imaginary）”（判断两个方向互相垂直的准则）就化成一个简洁的多项式条件 $lm + pq = 0$。此后，题目余下的部分只是一路追踪下去：每条垂直的弦（chord）都以形如 $z \mapsto c/z$ 的公式给出新的点，你只须把这些映射复合（compose）起来，看看结果是甚么。

解答

垂直的判别准则

设 S 的半径为 r，则 $|l| = |m| = |p| = |q| = r$，因此

$$\bar{l} = \frac{r^2}{l}, \qquad \bar{m} = \frac{r^2}{m}, \qquad \bar{p} = \frac{r^2}{p}, \qquad \bar{q} = \frac{r^2}{q}.$$

弦 LM 和 PQ 的方向分别是 $l - m$ 和 $p - q$，由于各点互不相同，两者皆不为零。两个非零复数所代表的方向互相垂直，当且仅当它们的商是纯虚数，所以设

$$w = \frac{l - m}{p - q}.$$

那么 w 是纯虚数当且仅当 $w + \bar{w} = 0$。现在

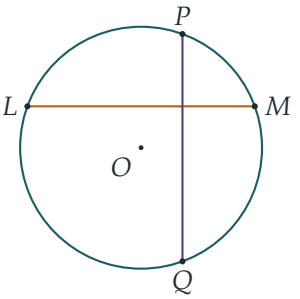
$$\bar{w} = \frac{r^2/l - r^2/m}{r^2/p - r^2/q} = \frac{(m - l)/(lm)}{(q - p)/(pq)} = \frac{l - m}{p - q} \cdot \frac{pq}{lm} = w\,\frac{pq}{lm},$$

所以

$$w + \bar{w} = w\left(1 + \frac{pq}{lm}\right) = \frac{w}{lm}\,(lm + pq).$$

由于 $w \neq 0$ 且 $lm \neq 0$，上式等于零当且仅当 $lm + pq = 0$。所以 $LM \perp PQ$ 当且仅当 $lm + pq = 0$，这正是所要证明的。

（用垂直平分线（perpendicular bisector）的做法，其实是同一个想法换上几何的外衣：弦 LM 的垂直平分线通过 O，而弦的方向是该平分线方向的 i 倍。）



$l = re^{i\cdot 160^\circ}$, $m = re^{i\cdot 20^\circ}$
$p = re^{i\cdot 70^\circ}$, $q = re^{-i\cdot 70^\circ}$
$lm = -r^2$, $pq = r^2$

三个点

以 a_1, a_2, a_3 表示 A_1, A_2, A_3，并以 z 表示 A_1'。根据上述准则，“$A_1'A_2' \perp A_1A_2$”即是 $z\,a_2' = -a_1a_2$，所以

$$a_2' = -\frac{a_1a_2}{z}.$$

这个点确实在 S 上，因为 $|a_2'| = r \cdot r/r = r$；而且它是 S 上唯一符合要求的点。同理

$$a_3' = -\frac{a_2a_3}{a_2'} = \frac{a_3}{a_1}z,$$
$$a_1'' = -\frac{a_3a_1}{a_3'} = -\frac{a_1^2}{z}.$$

因此 $A_1'' = A_1'$ 当且仅当 $z = -a_1^2/z$，即

$$z^2 = -a_1^2 \iff z = \pm i\,a_1.$$

这两个值的模（modulus）都是 r，所以都在 S 上；又因为 $a_1 \neq 0$，它们并不相同。所以 A_1' 恰好有两个位置：就是把 A_1 绕 O 旋转 $\pm 90^\circ$ 所得的两点。

> ? **想一想** 映射 $z \mapsto -a_1^2/z$ 对这个圆做了甚么？

在 S 上有 $1/z = \bar{z}/r^2$，所以 $-a_1^2/z = -(a_1^2/r^2)\,\bar{z}$，这是先取共轭、再作旋转（rotation）：也就是把圆沿一条直径作反射（reflection）。反射恰好只固定镜线的两个端点，这就是为何有两个解。事实上，每一步 $z \mapsto -a_ka_{k+1}/z$ 都是这样的反射，而这一点解释了下文的一切。

四个点

继续同样的追踪，只是最后一步改用 a_4：

$$a_2' = -\frac{a_1 a_2}{z}, \qquad a_3' = \frac{a_3}{a_1} z,$$
$$a_4' = -\frac{a_3 a_4}{a_3'} = -\frac{a_1 a_4}{z}, \qquad a_1'' = -\frac{a_4 a_1}{a_4'} = z.$$

所以无论 A_1' 取 S 上哪一点，都有 $A_1'' = A_1'$。

n 个点

对 k 用归纳法（induction），这样追踪下去可得

$$a_k' = \frac{a_k}{a_1} z \quad (k \text{ 为奇数}), \qquad a_k' = -\frac{a_1 a_k}{z} \quad (k \text{ 为偶数}),$$

因为若 a_k' 具有其中一种形式，则 $a_{k+1}' = -a_k a_{k+1}/a_k'$ 便具有另一种形式。最后一步是 $a_1'' = -a_n a_1 / a_n'$：

- 若 n 是偶数，$a_1'' = -a_n a_1 \cdot \dfrac{z}{-a_1 a_n} = z$，所以对每一个 A_1'，A_1'' 都与 A_1' 重合；
- 若 n 是奇数，$a_1'' = -a_n a_1 \cdot \dfrac{a_1}{a_n z} = -\dfrac{a_1^2}{z}$，所以与 $n = 3$ 的情况完全一样，A_1'' 与 A_1' 重合的情况恰好只有 A_1' 的两个位置，即 $z = \pm \mathrm{i} a_1$。

用文字来说：偶数次反射合成一个旋转，而在这里它原来就是恒等映射（identity）；奇数次反射则合成一个反射，它在圆上有两个不动点（fixed point）。

验算

- 图中的例子：取 $l = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\cdot 160^\circ}$、$m = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\cdot 20^\circ}$ 时，弦 LM 是水平的；取 $p = r\mathrm{e}^{\pm \mathrm{i}\cdot 70^\circ}$ 时，弦 PQ 是垂直的；而确实有 $lm = r^2 \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi} = -r^2 = -pq$。
- 数值验证：在半径随机的圆上随机取点，并让 n 由 3 取到 9，沿着垂直的弦逐步追踪，每一步所得的点都落回 S 上；当 n 是偶数时，最后准确地回到起点；当 n 是奇数时，沿圆周扫描 200 000 个起始位置，恰好找到两个不动点，位于 $\pm \mathrm{i} a_1$。

常见错误

- 以“w 是实数”来检验垂直。平行的弦给出实数比；垂直的弦给出的是纯虚数比。
- 忘记 $\bar{z} = r^2/z$ 需要 $|z| = r$；正是因为四个点全都在以 O 为圆心的同一个圆上，这个准则才会如此简洁。

▶ 在 n 个点的情况中，忘记答案取决于 n 的奇偶性（parity）。

STEP 之外

把映射 $z \mapsto c/z$ 限制在圆上，所得的就是反射，而反射的复合正是研究等距变换群（isometry group）的起点：圆的对称构成正交群（orthogonal group）$O(2)$，当中两个反射复合起来就是一个旋转。像 $z \mapsto c/z$ 和 $z \mapsto (az+b)/(cz+d)$ 这样的映射称为莫比乌斯变换（Möbius transformations），是复分析（complex analysis）和几何的核心。Needham 的 *Visual Complex Analysis* 把这两种观点都阐述得十分精彩。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。