详细解答

STEP II 1990，第 4 题

纯数学 · 直线排布与数学归纳法

> **STEP II 1990，第 4 题**
>
> 继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：
>
> step.maths.org/questions/90-s2-q4

本题在 *Beyond STEP* 第 9.1 节直线分割平面中有完整的引导式讲解：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/ch09/lazy-caterer.html

关键思路

逐条直线地看这幅图。每加入一条新直线，它与每条旧直线都恰好相交一次，而且交点各不相同，所以它被切成的段数是可以预知的。每一段都有两个作用：它本身是一条新的线段，同时又把一个原有的区域一分为二。数清楚加入一条新直线所带来的变化，便得到递推关系（recurrence），而这些递推关系很容易求和。

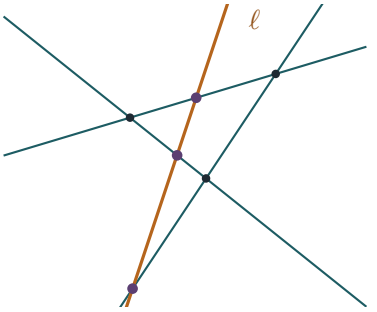
解答

小的情况

在下文中，“线段”（segment）是指某条直线上相邻两个交点之间的一段，包括每条直线两端的两段无限长部分（射线，ray）；只有一条直线时，整条直线算作一条线段。画出最初几种情况，可得：

n	1	2	3	4
线段	1	4	9	16
区域	2	4	7	11

例如，三条直线围成一个三角形：每条直线被切成一条有限的边和两条射线，共得 9 条线段；而区域则有三角形本身、三个与它的边相接的区域，以及三个与它的顶点相接的区域，合共 7 个。线段的数目令人猜想答案是 n^2。



图中有三条直线（蓝绿色）和第四条直线 ℓ（琥珀色）。ℓ 与旧直线相交于三个紫红色的点，这三点把它切成四段，每一段各把七个旧区域的其中一个分成两个，于是得到 11 个区域。

线段的数目

固定 n 条直线中的一条。由于没有两条直线平行（parallel），它与其余 $n-1$ 条直线各相交一次；又由于没有三条直线共点（concurrent），这 $n-1$ 个交点各不相同（假如有两个交点重合，便会有三条直线在该处相交）。所以这条直线上有 $n-1$ 个不同的点，把它切成 n 段：$n-2$ 条有限线段和 2 条射线。对 n 条直线逐一这样做，可得

$$\text{线段的数目} = n \cdot n = n^2.$$

每条线段只被数了一次，因为每条线段都恰好位于一条直线上。

如果你喜欢用归纳法（induction），可设 $S(n)$ 为线段的数目。在 $n-1$ 条处于一般位置（general position）的直线上加入第 n 条直线，新直线被切成 n 段，而它所穿过的 $n-1$ 条旧直线，每条都有一条线段被分成两条，即每条各多出一条线段。所以

$$S(n) = S(n-1) + n + (n-1) = S(n-1) + 2n - 1,$$

而 $S(1) = 1$，若 $S(n-1) = (n-1)^2$，则 $S(n) = (n-1)^2 + 2n - 1 = n^2$。

区域的数目

设 $R(n)$ 为 n 条处于一般位置的直线所分成的区域数目，所以 $R(1) = 2$。从 $n-1$ 条这样的直线出发，加入第 n 条直线 ℓ。如上所述，ℓ 与旧直线相交于 $n-1$ 个不同的点，并被切成 n 段。

取其中一段。它的内部不与任何旧直线相交，所以它位于单一个旧区域之内，并且由边界到边界（或一直伸延至无穷远）横贯该区域。因此它把该区域分成两个。

想一想 这 n 段之中，会否有两段位于同一个旧区域内，以致新增的区域少于 n 个？

不会。每个区域都是若干个半平面（half-plane）的交集（即位于每条旧直线的某一固定侧），所以它是凸（convex）的。一条直线与一个凸集的交集是单一个区间，所以 ℓ 最多只穿过每个旧区域一次，不同的段位于不同的区域。此外，ℓ 没有经过的区域则完全不受影响。

所以加入 ℓ 恰好把 n 个旧区域一分为二，其余的保持不变：

$$R(n) = R(n-1) + n.$$

现在使用归纳法。当 $n = 1$ 时，公式 $\frac{1}{2}(n^2+n+2)$ 给出 2，这是正确的。若 $R(n-1) = \frac{1}{2}\big((n-1)^2+(n-1)+2\big) = \frac{1}{2}(n^2-n+2)$，则

$$R(n) = \tfrac{1}{2}(n^2-n+2) + n = \tfrac{1}{2}(n^2+n+2),$$

所以公式对所有 $n \geq 1$ 成立，证明完毕。（等价地，$R(n) = 1 + (1+2+\cdots+n) = 1 + \frac{1}{2}n(n+1)$，其中开首的 1 是没有任何直线时的整个平面。）

验算

- 当 $n = 1, 2, 3, 4$ 时，公式给出 $2, 4, 7, 11$，与所画的图吻合。
- 欧拉公式（Euler's formula）提供了一个独立的验算方法。把所有无限长的射线在单一个“无穷远点”（point at infinity）处连接起来。这样便有 $V = \binom{n}{2} + 1$ 个顶点、$E = n^2$ 条边和 F 个面，且 $V - E + F = 2$，所以 $F = n^2 - \binom{n}{2} + 1 = \frac{1}{2}(n^2+n+2)$。
- 我们用电脑随机画出最多 8 条系数为整数的直线，通过找出交点的位置来数线段，并在每个交点附近及远处选取样本点，以这些样本点“位于每条直线哪一侧”的不同组合数目作为区域的数目。例如，8 条直线每次都得出 64 条线段和 37 个区域。

常见错误

- 忘记每条直线上的两条无限长射线，结果得出 $n(n-2)$ 而不是 n^2。
- 说新直线增加 $n-1$ 个区域（每个交点一个），而不是 n 个（每段一个）。
- 没有用上题设条件：若没有“无三线共点”这个条件，一条直线上的交点便不一定各不相同，数目亦会减少。

STEP 之外

这是*超平面排列*（hyperplane arrangement）最简单的情况。把同样的论证提高一个维度，可证明 n 个处于一般位置的平面把空间切成 $\frac{1}{6}(n^3+5n+6)$ 块，因为每个新平面本身都被旧平面切成 $R(n-1)$ 个区域。用欧拉公式所作的验算，让我们初次窥见欧拉示性数（Euler characteristic），它是拓扑学（topology）的一个核心概念。若想读一章讲述欧拉公式及其应用的精彩文字，可参阅 Aigner 与 Ziegler 的 *Proofs from THE BOOK*（《数学天书中的证明》）。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。