详细解答

STEP II 1990，第 3 题

纯数学 · 三次曲线的描绘

> **STEP II 1990，第 3 题**
>
> 继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：
>
> step.maths.org/questions/90-s2-q3

关键思路

把这个三次式（cubic）写成 $f(x) = x(x^2 - 2bx + c^2)$。两个判别式（discriminant）决定了一切：$f'(x)$ 的判别式告诉我们曲线有没有转向点（turning point），而二次因式的判别式则告诉我们曲线除了原点之外，还会不会在别处与 x 轴相交。题目的七种情况，不过是 b 相对于两个临界值 $\frac{\sqrt{3}}{2}c$ 和 c 的各种位置。三次曲线一旦画好，$y^2 = f(x)$ 几乎是顺手可得：只保留 $f(x) \geq 0$ 的部分，取平方根，再对 x 轴作反射。

解答

各种情况都成立的事实

设 $f(x) = x^3 - 2bx^2 + c^2x = x(x^2 - 2bx + c^2)$。则

$$f'(x) = 3x^2 - 4bx + c^2, \qquad f''(x) = 6x - 4b.$$

- *转向点。* f' 的判别式是 $16b^2 - 12c^2 = 4(4b^2 - 3c^2)$。所以若 $2b > c\sqrt{3}$，f' 有两个相异实零点；若 $2b = c\sqrt{3}$，有一个重零点；若 $2b < c\sqrt{3}$，则没有零点。有零点时，它们的和是 $\frac{4}{3}b \geq 0$，积是 $\frac{1}{3}c^2 \geq 0$，所以两个都不是负数：所有转向点都位于 $x \geq 0$ 的范围内。
- *根。* $f(0) = 0$ 恒成立。二次因式是 $(x - b)^2 + c^2 - b^2$，所以若 $b < c$，它没有实零点；若 $b = c$，有二重零点 $x = b$；若 $b > c$，则有两个零点 $b \pm \sqrt{b^2 - c^2}$。
- *负的 x。* 当 $x < 0$ 时，x^3、$-2bx^2$ 和 c^2x 每一项都 ≤ 0，而且 $x^3 < 0$，所以 $f(x) < 0$。曲线在 y 轴左边的部分全部位于 x 轴下方。
- *形状。* 当 $x \to \pm\infty$ 时 $f(x) \to \pm\infty$；曲线在原点的斜率（gradient）是 $f'(0) = c^2$；唯

一的拐点（point of inflection）在 $x = \frac{2}{3}b$，f'' 在该处变号。

由于只要 $c > 0$ 就有 $c\sqrt{3} < 2c$，所以对固定的 c，各种情况是按 b 由小至大的次序排列的：先是没有转向点，然后是驻拐点，再然后是转向点都在横轴上方，接着是曲线在一个根处与横轴相切，最后是三个根。

三次曲线

(i) $2b < c\sqrt{3}$。这时对所有 x 都有 $f'(x) > 0$（它的判别式是负数，首项系数是正数），所以 f 严格递增。此外 $b < \frac{\sqrt{3}}{2}c < c$（注意这里 $c > 0$），所以原点是唯一的根。曲线以斜率 c^2 上升穿过原点，并在 $x = \frac{2}{3}b$ 处有一个拐点。

(ii) $2b = c\sqrt{3} \neq 0$。这时 $f'(x) = 3(x - \frac{2}{3}b)^2 \geq 0$, 所以 f 仍然递增, 但在 $x = \frac{2}{3}b = c/\sqrt{3}$ 处有一瞬间是水平的。这也正是 $f'' = 0$ 的地方，所以它是一个驻拐点（stationary point of inflection）。利用 $c^2 = \frac{4}{3}b^2$,

$$f\left(\tfrac{2}{3}b\right) = \tfrac{2}{3}b\left(\tfrac{4}{9}b^2 - \tfrac{4}{3}b^2 + \tfrac{4}{3}b^2\right) = \tfrac{8}{27}b^3 = \tfrac{\sqrt{3}}{9}c^3 > 0.$$

同样有 $b < c$，所以原点是唯一的根。

(iii) $c\sqrt{3} < 2b < 2c$。这时 f' 有两个零点 $x_1 < x_2$，两个都是正数，于是在 $x_1 = \frac{1}{3}\left(2b - \sqrt{4b^2 - 3c^2}\right)$ 处有极大点（maximum），在 $x_2 = \frac{1}{3}\left(2b + \sqrt{4b^2 - 3c^2}\right)$ 处有极小点（minimum）。

> **?** **想一想** 极小点会不会跌到 x 轴下方?

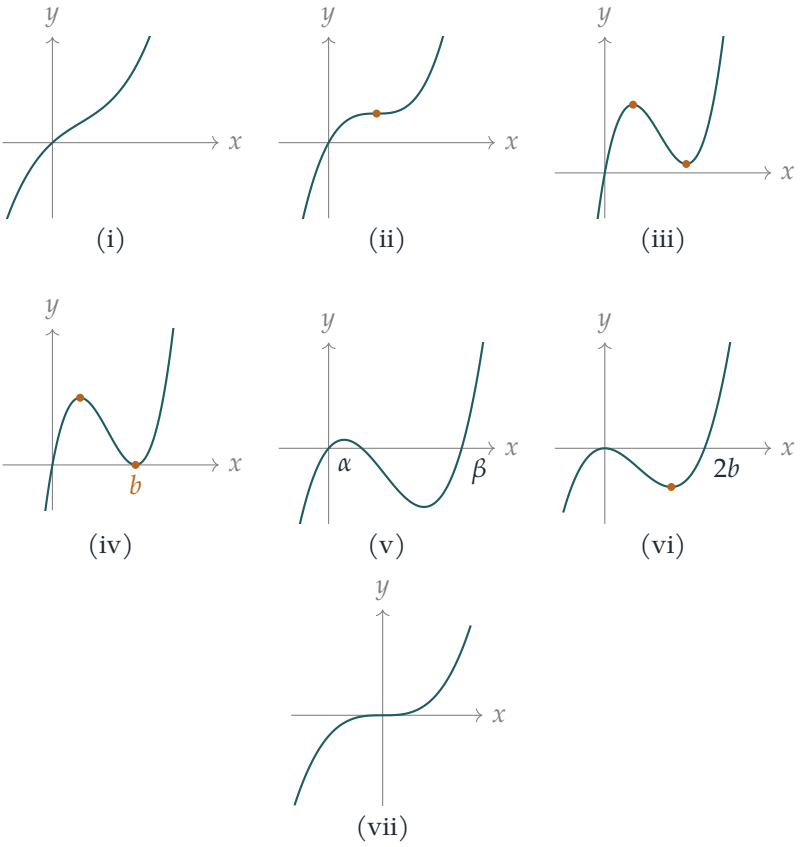
不会。由于 $b < c$，因式 $(x - b)^2 + c^2 - b^2$ 对每一个 x 都是正数，所以对所有 $x > 0$ 都有 $f(x) > 0$。因此两个转向点都在横轴上方，曲线仍然只在原点穿过横轴。它先上升，稍微回落，然后一直上升。

(iv) $b = c \neq 0$。这时 $f(x) = x(x - b)^2$。$x = b$ 是二重根，表示曲线在该处与横轴相切；这就是极小点 $(b, 0)$。$f'(x) = (x - b)(3x - b)$ 的另一个零点给出极大点 $\left(\frac{1}{3}b, \frac{4}{27}b^3\right)$。

(v) $b > c > 0$。这时有三个根 $0 < \alpha < \beta$，其中 $\alpha = b - \sqrt{b^2 - c^2}$，$\beta = b + \sqrt{b^2 - c^2}$（因为 $\sqrt{b^2 - c^2} < b$，所以两个都是正数）。在相邻两个根之间曲线必定要转向，所以极大点在 $(0, \alpha)$ 内，该区间上 $f > 0$；极小点在 (α, β) 内，该区间上 $f < 0$。所以 $f \geq 0$ 恰好在 $[0, \alpha]$ 和 $[\beta, \infty)$ 上成立。

(vi) $c = 0, b \neq 0$。这时 $f(x) = x^2(x - 2b)$，$f'(x) = x(3x - 4b)$。原点是二重根，所以它是极大点，曲线在该处与横轴相切；另外在 $\left(\frac{4}{3}b, -\frac{32}{27}b^3\right)$ 处有极小点。曲线在 $x = 2b$ 处穿过横轴。

(vii) $b = c = 0$。这就是 $y = x^3$，在原点有一个驻拐点。



这些草图取 $c=1$，在 (i)–(iv) 中 $b=\frac{1}{2}$, $\frac{\sqrt{3}}{2}$, 0.99, 1，在 (v) 中 $(b,c)=(1,0.8)$，在 (vi) 中 $b=0.6$。各小图的纵向比例并不相同，好让 (iii) 和 (iv) 中细小的起伏能够看得见。

曲线 $y^2=f(x)$

以下三条法则可把每条三次曲线变成曲线 $y^2=f(x)$：

- 在 $f(x)<0$ 的地方没有点，尤其是 $x<0$ 的地方没有点；
- 在 $f(x)\geq 0$ 的地方，$y=\pm\sqrt{f(x)}$，所以曲线对 x 轴对称，并且在 f 最大的地方最高；
- 求导可得 $2y\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f'(x)$。

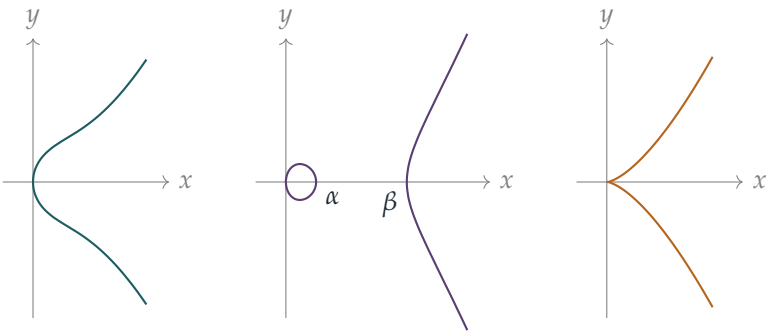
想一想 曲线与 x 轴相交的地方是甚么样子的?

在 f 的单根(simple root)x_0 处,我们有 $f'(x_0)\neq 0$,而当 $y\to 0$ 时 $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}=\dfrac{2y}{f'(x)}\to 0$。所以该处的切线(tangent)是垂直的,上下两半平滑地接合。在这样的根附近 $y^2\approx f'(x_0)(x-x_0)$,那是一条横放的抛物线。重根（repeated root）的表现则有所不同，情况 (vii) 就是例子。

情况 (i)。$f(x) \geq 0$ 恰好当 $x \geq 0$ 时成立，而 0 是单根（$f'(0) = c^2 > 0$）。所以曲线是单独一条无界的分支。它以垂直切线离开原点，在该处看来像 $y^2 \approx c^2 x$；由于 f 递增，$|y| = \sqrt{f(x)}$ 稳步增加，最终增长得像 $x^{3/2}$。上半部分起初是凹（concave）的，像 $\sqrt{x}$，最后变成凸（convex）的，像 $x^{3/2}$，所以它有一个拐点（由对称性，下半部分也有）。

情况 (v)。$f(x) \geq 0$ 在 $[0, \alpha]$ 和 $[\beta, \infty)$ 上成立，而三个根都是单根。所以曲线分成互不相连的两部分：一个封闭的卵形线，经过 $(0,0)$ 和 $(\alpha, 0)$，在这两点的切线都是垂直的，并且在三次曲线极大点的 x 坐标处最宽（就 y 方向而言）；以及一条无界的分支，从 $(\beta, 0)$ 以垂直切线出发，像情况 (i) 的曲线那样向右张开。在三次曲线取负值的空隙 $\alpha < x < \beta$ 中，甚么都没有。

情况 (vii)。$y^2 = x^3$，所以 $x \geq 0$ 且 $y = \pm x^{3/2}$。这里当 $x \to 0$ 时 $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x = \pm\frac{3}{2}x^{1/2} \to 0$：两半分别从上方和下方到达原点，并且都与 x 轴相切，形成一个尖角，称为尖点（cusp）。



(i) (v) (vii)

这些图所用的 b 和 c 的值与相应的三次曲线相同，两轴的比例相等。

验算

- 把 $b = c = 0$ 代入任何一个一般性的结论，结果都应该与 (vii) 吻合；例如 (ii) 中的驻点值 $\frac{8}{27}b^3$ 和 (vi) 中的极小值 $-\frac{32}{27}b^3$ 都收缩到原点。
- 取 $c = 1$ 和 $b = 0.99$（情况 (iii)），转向点大约在 $(0.340, 0.150)$ 和 $(0.980, 0.020)$，正如所说，两个都在横轴上方。取 $(b, c) = (1, 0.8)$，根是 0、0.4、1.6，极小值约为 -0.388，在 $x \approx 1.147$ 处取得，位于 $(0.4, 1.6)$ 之内。
- 就情况 (i)、(iii) 和 (v) 随机选取数千组 (b, c) 作数值测试，结果确认了转向点和根的数目与位置，以及 $f \geq 0$ 成立的集合。

常见错误

- 把情况 (iii) 的极小点画在横轴下方：当 $b < c$ 时，三次曲线对所有 $x > 0$ 都取正值。
- 画 $y^2 = f(x)$ 时，在它于单根处穿过 x 轴的地方画成一个角，或者画成水平切线。该处的切线是垂直的。
- 忘记了 $y^2 = f(x)$ 在三次曲线取负值的地方没有点，所以在情况 (v) 中，卵形线与分支是不相连的。

STEP 之外

若曲线 $y^2 = x^3 + Ax^2 + Bx + C$ 中的三次式有相异的根，这条曲线就是椭圆曲线（elliptic curve），是现代数论的核心对象之一。情况 (v) 有三个实根，给出一个卵形线加一条分支的两部分图形；情况 (i) 只有一个实根，给出单独一部分。当有根重合时，曲线就变成奇异（singular）的：情况 (vii) 有一个尖点，而情况 (iv) 则会给出一条在 $(b, 0)$ 处自相交的曲线。这类曲线上的点竟然可以用一种奇妙的方式“相加”，想初步了解，可参阅 Silverman 与 Tate 的 *Rational Points on Elliptic Curves*（椭圆曲线上的有理点）。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。