详细解答

STEP II 1990，第 2 题

纯数学 · 托勒密定理

> **STEP II 1990，第 2 题**
>
> 继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：
>
> step.maths.org/questions/90-s2-q2

关键思路

第一部分是一条三角恒等式（trigonometric identity），只要把每个正弦之积都化成余弦之差，它便迎刃而解；然后利用条件 $A+B+C+D=\pi$ 改写 $\cos(A+C)$ 和 $\cos(A-C)$。第二部分是托勒密定理（Ptolemy's theorem）。圆心 O 就是提示：半径为 r 的圆上每条弦（chord）的长度都是 $2r\sin$(所对角的一半，而该角的顶点为O)，而围绕 O 的四个半角之和为 π，这正是第一部分的条件。

解答

恒等式

我们三次使用积化和差公式（product-to-sum formula）

$$\sin X\sin Y=\tfrac{1}{2}[\cos(X-Y)-\cos(X+Y)]$$

。在左方，

$$\sin(A+B)\sin(A+D)=\tfrac{1}{2}[\cos(B-D)-\cos(2A+B+D)],$$
$$\sin B\sin D=\tfrac{1}{2}[\cos(B-D)-\cos(B+D)],$$

所以 $\cos(B-D)$ 两项互相抵消，得

$$\sin(A+B)\sin(A+D)-\sin B\sin D=\tfrac{1}{2}[\cos(B+D)-\cos(2A+B+D)].$$

在右方，

$$\sin A\sin C=\tfrac{1}{2}[\cos(A-C)-\cos(A+C)].$$

现在利用 $C = \pi - A - B - D$。由此可得

$$A + C = \pi - (B + D), \qquad \text{所以} \quad \cos(A + C) = -\cos(B + D),$$
$$A - C = (2A + B + D) - \pi, \qquad \text{所以} \quad \cos(A - C) = -\cos(2A + B + D),$$

当中用到 $\cos(\pi - \theta) = -\cos\theta$ 和 $\cos(\theta - \pi) = -\cos\theta$。因此

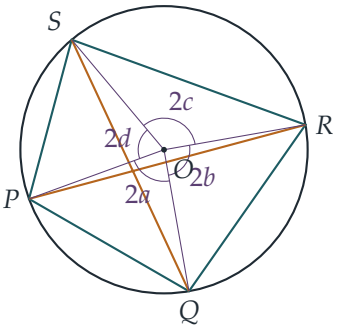
$$\sin A \sin C = \tfrac{1}{2}[-\cos(2A + B + D) + \cos(B + D)],$$

这与左方相同。恒等式得证。

圆

设圆的半径为 r。沿圆周由 P 到 Q 到 R 到 S 再回到 P，设弧（arc）PQ、QR、RS、SP 在 O 所对的角分别为 $2a$、$2b$、$2c$、$2d$。由于各点按此次序排列，这四段弧互不重叠，并合成整个圆，所以

$$a, b, c, d > 0, \qquad 2a + 2b + 2c + 2d = 2\pi, \qquad \text{即} \quad a + b + c + d = \pi.$$



想一想 若一条弦所对的弧在圆心所对的角为 2θ，这条弦有多长?

若 $0 < 2\theta \le \pi$，由 O 和弦的两个端点组成的三角形是等腰（isosceles）三角形，两腰长 r，顶角为 2θ。由 O 所作的垂线同时平分弦和顶角，所以弦长为 $2r\sin\theta$。若 $\pi < 2\theta < 2\pi$，则三角形内位于 O 的角为 $2\pi - 2\theta$，弦长为 $2r\sin(\pi - \theta) = 2r\sin\theta$。所以在任何情况下

$$\text{弦长} = 2r\sin\theta.$$

把这个结果应用于四条边，以及两条对角线（diagonal）（弧 $P \to Q \to R$ 所对的角为 $2(a + b)$，弧 $Q \to R \to S$ 所对的角为 $2(b + c)$），便得

$$PQ = 2r\sin a, \quad QR = 2r\sin b, \quad RS = 2r\sin c, \quad PS = 2r\sin d,$$

$$PR = 2r\sin(a + b), \qquad QS = 2r\sin(b + c).$$

注意 $a+b$ 或 $b+c$ 可能大于 $\frac{\pi}{2}$；这就是我们需要为大于半圆的弧验证该公式的原因。

除以 $4r^2$ 之后，要证明的结果变成

$$\sin a \sin c + \sin b \sin d = \sin(a+b)\sin(b+c),$$

或等价地，

$$\sin(b+a)\sin(b+c) - \sin a \sin c = \sin b \sin d.$$

这正是第一部分的恒等式，其中 $A=b$、$B=a$、$D=c$ 及 $C=d$；这样代入是容许的，因为 $b+a+d+c=\pi$。再乘回 $4r^2$，得

$$PQ \times RS + QR \times PS = PR \times QS,$$

这就是所要证明的结果。

验算

- 内接于半径为 $\frac{1}{\sqrt{2}}$ 的圆的正方形，边长为 1，对角线长 $\sqrt{2}$：$1\cdot 1 + 1\cdot 1 = 2 = \sqrt{2}\cdot\sqrt{2}$。
- 对任何边长为 p 和 q 的长方形，托勒密定理变成 $p^2+q^2 = (\text{对角线})^2$：毕氏定理（Pythagoras's theorem）是它的特殊情况。对于 3×4 的长方形，$9+16=25=5\times 5$。
- 以 10^5 组随机的 A, B, D 值（其中 $C=\pi-A-B-D$）对恒等式作数值检验，最大误差约为 5×10^{-15}；另外 10^5 个随机的圆内接四边形（cyclic quadrilateral）均满足最后的结果，相对误差在 10^{-15} 以内。若各点的次序被打乱（例如沿圆周依次为 P, R, Q, S），等式便不成立，可见次序确实重要。

常见错误

- 使用以圆上某点为顶点的圆周角（inscribed angle），却没有说明它们对着哪一段弧。按题目的提示改用圆心角，便可避免这个问题。
- 忘记对角线所截的弧可以大于半圆；公式 $2r\sin\theta$ 依然成立，但需要上文那一行的理由来支持。
- 把错误的角配对到 A, B, C, D：A 和 C 必须是只在右方出现的两个角，在这里即 b 和 d。

STEP 之外

托勒密定理有一个影响深远的推广：对平面上任意四点，$PQ\cdot RS + QR\cdot PS \geq PR\cdot QS$，而等号成立当且仅当这些点依次位于同一个圆（或同一条直线）上。有一个巧妙的证明：把各

点视为复数(complex numbers)p, q, r, s,留意代数恒等式 $(p-q)(r-s)+(q-r)(p-s)=(p-r)(q-s)$，再应用三角不等式（triangle inequality）；等号成立的情况，正是复平面的几何派上用场之处。Needham 的 *Visual Complex Analysis*（《复分析：可视化方法》）是欣赏这类论证的绝佳读物，书中也介绍了反演（inversion），而反演同样能简洁地证明这个结果。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。