详细解答

STEP II 1990，第 16 题

概率与统计 • 贝叶斯定理

STEP II 1990，第 16 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/90-s2-q16

关键思路

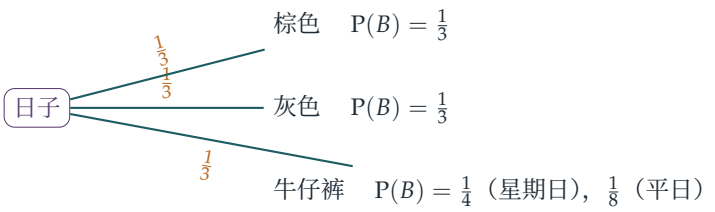
这其实是乔装了的贝叶斯定理（Bayes' theorem）。照片告诉我们当天系的是黑色领带，而我们要求的是已知这一点时，那天是某一天的概率。所以我们先顺着推：对每一类日子，用一幅按裤子分支的树形图（tree diagram），求出系黑色领带的概率。然后再把条件概率（conditional probability）倒转过来。星期一的规则只改动树形图的其中一条分支，所以第二部分几乎不用多花工夫。

解答

设 S 为照片摄于星期日的事件，B 为我系着黑色领带的事件。照片出自七天中任何一天的可能性均等，所以在看照片之前，$\mathrm{P}(S) = \frac{1}{7}$。除了（稍后的）星期一之外，每一天穿每条裤子的概率都是 $\frac{1}{3}$。

各类日子系黑色领带的机会

- **棕色裤子**。领巾已被排除，所以领带是从黑色、波点和军团领带三者中随机选出：$\mathrm{P}(B) = \frac{1}{3}$。
- **灰色裤子**。波点领带已被排除，所以是从黑色领带、军团领带和领巾中选：$\mathrm{P}(B) = \frac{1}{3}$。
- **星期日穿牛仔裤**。一定会系领带，从全部四条中选：$\mathrm{P}(B) = \frac{1}{4}$。
- **平日穿牛仔裤**。有 $\frac{1}{2}$ 的概率穿运动衫而不系领带。否则就是四条领带的其中一条：$\mathrm{P}(B) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{8}$。



沿各分支相加（即按裤子划分的全概率公式（law of total probability）），

$$\mathrm{P}(B \mid \text{星期日}) = \tfrac{1}{3}\left(\tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{4}\right) = \tfrac{1}{3}\cdot\tfrac{11}{12} = \tfrac{11}{36} = \tfrac{22}{72},$$
$$\mathrm{P}(B \mid \text{平日}) = \tfrac{1}{3}\left(\tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{8}\right) = \tfrac{1}{3}\cdot\tfrac{19}{24} = \tfrac{19}{72}.$$

第一个答案

根据贝叶斯定理，星期日的先验概率（prior）为 $\frac{1}{7}$，六个平日合计为 $\frac{6}{7}$，

$$\mathrm{P}(S \mid B) = \frac{\frac{1}{7}\cdot\frac{22}{72}}{\frac{1}{7}\cdot\frac{22}{72}+\frac{6}{7}\cdot\frac{19}{72}} = \frac{22}{22+6\times 19} = \frac{22}{136} = \frac{11}{68},$$

正如所求。（公因数 $\frac{1}{7\times 72}$ 会约去，这就是为甚么值得把所有分数都通分成以 72 为分母。）

> ? **想一想** 为甚么答案不直接是 $\mathrm{P}(B \mid \text{星期日})$，或者 $\frac{1}{7}$?

$\mathrm{P}(B \mid \text{星期日}) = \frac{11}{36}$ 答的是另一条问题：它是已知日子时系这条领带的机会，而不是已知领带时那天是星期日的机会。而 $\frac{1}{7}$ 则忽略了证据。星期日系黑色领带的可能性稍高一点（$\frac{22}{72}$ 对 $\frac{19}{72}$），因为那天没有不系领带这个选择，所以这张照片把星期日的概率由 $\frac{1}{7} = \frac{11}{77}$ 轻轻推高至 $\frac{11}{68}$。

加入星期一的规则

现在星期一必定穿牛仔裤，而星期一仍然是平日，所以运动衫这个选择依然适用：

$$\mathrm{P}(B \mid \text{星期一}) = 1\cdot\tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{4} = \tfrac{1}{8} = \tfrac{9}{72}.$$

星期日和其余五个平日不变。每一天的先验概率仍然是 $\frac{1}{7}$，可以约去，所以

$$\mathrm{P}(S \mid B) = \frac{\frac{22}{72}}{\frac{22}{72}+\frac{9}{72}+5\cdot\frac{19}{72}} = \frac{22}{22+9+95} = \frac{22}{126} = \frac{11}{63}.$$

这比 $\frac{11}{68}$ 稍大一点。这是合理的：星期一系黑色领带的可能性降低了（由 $\frac{19}{72}$ 变成 $\frac{1}{8}$），所以一张系黑色领带的照片会令星期一的可能性下降，而稍为更倾向星期日。

验算

- 每一天各条领带的概率，连同“不系领带”，加起来等于 1。例如，平日不系领带的机会是 $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$。
- 模拟 4×10^5 个随机日子，得出系黑色领带的日子当中星期日所占的比例约为 0.161（准确值 $\frac{11}{68} \approx 0.1618$），加入星期一的规则后则约为 0.174（准确值 $\frac{11}{63} \approx 0.1746$）。

常见错误

- 忘记了星期一穿牛仔裤时，仍然有一半机会穿运动衫：星期一是平日。星期一若用 $\frac{1}{4}$ 而不是 $\frac{1}{8}$，会得出 $\frac{22}{135}$。
- 穿棕色或灰色裤子时从全部四条领带中选。这两条裤子各自只剩下三条领带可选。

STEP 之外

把“已知假设时证据的概率”转化为“已知证据时假设的概率”，正是贝叶斯推断（Bayesian inference）的核心。有一个简洁的说法：后验赔率（posterior odds）等于先验赔率乘以似然比（likelihood ratio）。这里星期日对平日的先验赔率是 1 : 6，似然比是 22 : 19，于是得出 22 : 114，即 11 : 57。大学课程会由此发展出贝叶斯统计学（Bayesian statistics），当中整个分布都以同样的方式更新。Blitzstein 与 Hwang 的 *Introduction to Probability*（概率论入门）有一章讲条件概率，写得十分出色，并附有许多像本题这样的例子。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。