详细解答

STEP II 1990，第 15 题

概率与统计 • 顺序统计量

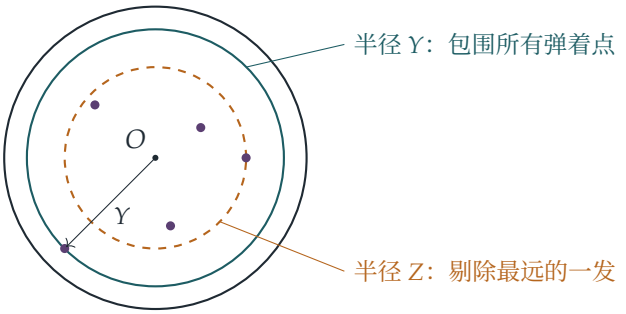
STEP II 1990，第 15 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/90-s2-q15

关键思路

以 O 为圆心、能包围一组弹着点的最小圆，其半径等于最远一发与圆心的距离，所以 Y 是若干个独立（independent）距离的最大值。最大值不超过 y，当且仅当每一发都落在距离 y 之内，于是累积分布函数（cumulative distribution function）便化为一个乘积。剔除最远的一发之后，我们要求的半径是第二大的距离，而它的分布函数可以通过数算有多少发可以落在给定的圆之外而求得。



解答

设 $R_1, \ldots, R_n$ 为 n 发射击的弹着点与 O 的距离。它们互相独立（因为各发是独立射出的），而且每一个的分布函数都是

$$P(R_i \leq t) = t^2, \qquad 0 \leq t \leq 1.$$

Y 的分布

以 O 为圆心、包含所有弹着点的最小圆，半径为 $Y = \max(R_1, \ldots, R_n)$。对于 $0 \le y \le 1$，

$$P(Y \le y) = P(R_1 \le y, \ldots, R_n \le y) = \prod_{i=1}^{n} P(R_i \le y) = (y^2)^n = y^{2n},$$

其中中间一步用到独立性。求导后，Y 的概率密度函数（probability density function）为

$$f_Y(y) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y} y^{2n} = 2ny^{2n-1}, \qquad 0 \le y \le 1,$$

正如题目所求。（它在 $[0,1]$ 之外为零，而且积分为 1，理应如此。）

圆的面积为 πY^2，所以

$$E(\pi Y^2) = \pi \int_0^1 y^2 \cdot 2ny^{2n-1}\,\mathrm{d}y = 2n\pi \int_0^1 y^{2n+1}\,\mathrm{d}y = \frac{2n\pi}{2n+2} = \frac{n\pi}{n+1}.$$

剔除最远的一发

我们需要 $n \ge 2$，这样才会有弹着点剩下。剔除最远的一发之后，以 O 为圆心的最小包围圆的半径为 Z，即 $R_1, \ldots, R_n$ 之中第二大的一个。

> **想一想** 怎样用“有多少发落在半径为 z 的圆之外”来描述事件 $Z \le z$?

第二大的距离不超过 z，当且仅当最多只有一发与 O 的距离大于 z。每一发各自独立地以概率 z^2 落在距离 z 之内，所以落在半径为 z 的圆之外的发数服从二项分布（binomial distribution），$\mathrm{B}(n, 1-z^2)$。因此，对于 $0 \le z \le 1$，

$$\begin{aligned} P(Z \le z) &= P(\text{没有一发在圆外}) + P(\text{恰好一发在圆外}) \\ &= z^{2n} + n(1-z^2)z^{2(n-1)} \\ &= nz^{2n-2} - (n-1)z^{2n}. \end{aligned}$$

求导便得 Z 的密度函数：

$$f_Z(z) = 2n(n-1)z^{2n-3} - 2n(n-1)z^{2n-1} = 2n(n-1)z^{2n-3}(1-z^2), \qquad 0 \le z \le 1.$$

因此新圆的面积的期望值（expected value）为

$$\begin{aligned} E(\pi Z^2) &= 2n(n-1)\pi \int_0^1 \left(z^{2n-1} - z^{2n+1}\right)\mathrm{d}z \\ &= 2n(n-1)\pi \left(\frac{1}{2n} - \frac{1}{2n+2}\right) \\ &= 2n(n-1)\pi \cdot \frac{2}{2n(2n+2)} = \left(\frac{n-1}{n+1}\right)\pi, \end{aligned}$$

这正是所求的结果。

验算

- 当 $n = 1$ 时，第一个答案是 $\pi/2$：单独一发的 R^2 在 $[0,1]$ 上服从均匀分布（uniform distribution）（因为 $P(R^2 \leq u) = u$），所以面积 πR^2 的期望值是 $\pi/2$。
- 当 $n = 2$ 时，第二个答案是 $\pi/3$，即两发之中较近一发所对应的面积期望值；连同第一个答案 $2\pi/3$，两者的平均是 $\pi/2$，即单独一发时的值，这是必然的。
- 以 2×10^5 次试验及 $n = 5$ 进行模拟（simulation），得到的面积期望值为 2.618 和 2.095，而理论值为 $5\pi/6 \approx 2.618$ 和 $4\pi/6 \approx 2.094$。

常见错误

- 写成 $P(Z \leq z) = z^{2(n-1)}$，仿佛余下的弹着点是一个全新的、大小为 $n-1$ 的样本；被剔除的一发并不是随机选出的，所以留下来的弹着点会偏向 O。
- 忘记了因子 n，它代表落在圆外的是哪一发。
- 先求 $E(Y)$ 再把它平方：面积的期望值是 $\pi E(Y^2)$，而不是 $\pi\big(E(Y)\big)^2$。

STEP 之外

这些就是*顺序统计量*（order statistics）。由于 $U_i = R_i^2$ 在 $[0,1]$ 上服从均匀分布，这些面积其实就是 n 个均匀随机变量的顺序统计量，而第 k 小的一个（取自 n 个独立的均匀随机变量）服从贝塔分布（beta distribution），平均值为 $k/(n+1)$；本题的两个答案分别是 $k = n$ 和 $k = n-1$ 的情况。一个简洁的图像是：n 个随机点把 $[0,1]$ 分割成 $n+1$ 段期望长度相等的间隙。Grimmett 与 Welsh 的 *Probability: An Introduction*（概率入门教科书）涵盖了这类变换和顺序统计量。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。