详细解答

# STEP II 1990，第 14 题

力学 • 弹性碰撞

**STEP II 1990，第 14 题**

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/90-s2-q14

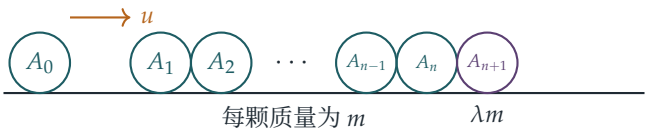
本题在 *Beyond STEP* 第 10.1 节牛顿摆中有完整的引导式讲解：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/ch10/newtons-cradle.html

## 关键思路

我们不知道冲量（impulse）怎样沿着这列弹珠传递，所以无法逐次追踪每一下碰撞。我们能做的，是用三个条件去检验每个提出的最终运动：动量（momentum）守恒、动能（kinetic energy）守恒，以及弹珠永远不会互相穿过。第三个条件很容易被遗忘，但每一部分的结论正是由它决定的。若一颗弹珠的正后方紧贴着一颗静止的弹珠，它就不能向后运动；而一颗弹珠的速度也不能比它正前方的弹珠快。

## 解答

我们把弹珠看成在一条光滑直线（即槽）上的质点（particle），速度以 $A_0$ 原来的运动方向为正。碰撞之前，总动量是 $mu$，总动能是 $\frac{1}{2}mu^2$，两者都守恒。




由于弹珠不能重叠，任何可能的最终运动都必须符合以下两点。

- 若 $A_k$ 静止，而 $A_{k+1}$ 在它的正前方并与它接触，则 $A_{k+1}$ 的速度不能是负数。
- 若 $A_k$ 与 $A_{k+1}$ 互相接触，则 $A_k$ 的速度不能大于 $A_{k+1}$ 的速度。

### 第 (i) 部分

假设只有 $A_n$ 和 $A_{n+1}$ 运动，速度分别为 $v$ 和 $w$。两式同除以 $m$，得

$$v + \lambda w = u,$$
$$v^2 + \lambda w^2 = u^2.$$

把 $v = u - \lambda w$ 代入能量方程，得

$$u^2 - 2\lambda uw + \lambda^2 w^2 + \lambda w^2 = u^2 \quad \Longrightarrow \quad \lambda w\big((1+\lambda)w - 2u\big) = 0.$$

根 $w = 0$ 给出 $v = u$。这样 $A_n$ 就会向前撞进静止的 $A_{n+1}$，这是不可能的。另一个根是

$$w = \frac{2u}{1+\lambda}, \qquad v = u - \lambda w = \frac{(1-\lambda)u}{1+\lambda}.$$

**若 $\lambda < 1$：** 则 $v > 0$，所以 $A_n$ 离开静止的 $A_{n-1}$。此外

$$w - v = \frac{(1+\lambda)u}{1+\lambda} = u > 0,$$

所以 $A_{n+1}$ 离开 $A_n$。两条守恒定律都成立，而且没有弹珠重叠，因此这个运动是可能的，其中 $A_0, \ldots, A_{n-1}$ 全部静止。

**若 $\lambda > 1$：** 则 $v < 0$，所以 $A_n$ 必须向后运动。但 $A_{n-1}$ 就在它的正后方，与它接触而且静止。因此，唯一同时满足两条守恒定律的运动在物理上并不可能，所以当 $\lambda > 1$ 时，这类运动并不存在。

### 第 (ii) 部分

假设只有 $A_{n-1}$、$A_n$ 和 $A_{n+1}$ 运动，速度分别为 $a$、$b$ 和 $c$。由于 $n \geq 3$，弹珠 $A_{n-2}$ 存在，它静止不动，并从后面与 $A_{n-1}$ 接触。所以 $a \geq 0$。由于三颗运动中的弹珠不能互相超越，$a \leq b \leq c$。因此 $a$、$b$ 和 $c$ 全部非负。

> ? **想一想** 两条守恒定律都给出关于 $a$、$b$、$c$ 的方程。怎样可以不解方程而比较它们?

我们把动量方程平方，再减去能量方程。由守恒得 $a + b + \lambda c = u$ 和 $a^2 + b^2 + \lambda c^2 = u^2$，所以

$$(a + b + \lambda c)^2 - (a^2 + b^2 + \lambda c^2) = u^2 - u^2 = 0.$$

展开左方，得

$$\lambda(\lambda - 1)c^2 + 2ab + 2\lambda c(a + b) = 0.$$

当 $\lambda > 1$ 且 $a, b, c \geq 0$ 时,左方每一项都非负,所以每一项都必须是零。特别地,$\lambda(\lambda-1)c^2 = 0$，由此得 $c = 0$。于是 $0 \leq a \leq b \leq c = 0$，三颗弹珠全部静止。由于 $u > 0$，这与动量方程矛盾。因此当 $\lambda > 1$ 时，这样的运动并不存在。

### 第 (iii) 部分

(ii) 的论证适用于任何一组运动中的弹珠：若所有速度都非负，而 $A_{n+1}$ 运动，则动能会太小。所以当 $\lambda > 1$ 时，必定有某颗弹珠向后运动。除了 $A_0$ 之外，每颗弹珠的正后方都有另一颗弹珠，所以 $A_0$ 自然是最有可能反弹的一颗。

**想一想** 我们应该试哪两颗弹珠?

试试 $A_0$ 和 $A_{n+1}$，速度分别为 $p$ 和 $q$，而 $A_1, \ldots, A_n$ 保持静止。所得的两条方程与 (i) 中的相同，只是以 $p, q$ 代替 $v, w$，而非平凡解（non-trivial solution）是

$$p = \frac{(1-\lambda)u}{1+\lambda} = -\frac{(\lambda-1)u}{\lambda+1}, \qquad q = \frac{2u}{1+\lambda}.$$

与 (i) 一样，动量和能量都守恒。这个运动在物理上也是可能的：

- $p < 0$，所以 $A_0$ 向后运动，离开 $A_1$，而 $A_0$ 后面没有任何东西。
- $q > 0$，所以 $A_{n+1}$ 离开静止的 $A_n$。

所以其中一个可能的运动是：$A_0$ 以速率 $\dfrac{(\lambda-1)u}{\lambda+1}$ 反弹，$A_{n+1}$ 以速率 $\dfrac{2u}{\lambda+1}$ 向前运动，而 $A_1, \ldots, A_n$ 保持静止。

如果我们把这次碰撞看成相邻弹珠之间一连串独立的碰撞，结果也是如此。每对质量相等的弹珠会交换速度，所以速率 $u$ 一直传递到 $A_n$。当 $A_n$ 撞上 $A_{n+1}$ 时，它以速度 $p$ 反弹，然后这个向后的速度再沿着这列弹珠传回 $A_0$。

## 验算

- 当 $\lambda = 1$ 时，所有弹珠完全相同，两个答案都变成 $A_{n+1}$ 以速率 $u$ 向前运动，而其余全部静止，这就是大家熟悉的“牛顿摆”（Newton's cradle）。
- 取 $\lambda = 2$ 和 $u = 3$，第 (iii) 部分给出 $p = -1$ 和 $q = 2$。动量：$-1 + 2 \times 2 = 3$。能量：$1 + 2 \times 4 = 9 = 3^2$。
- 我们就 $n = 3$ 和 $n = 6$ 以数值方法逐步计算了这一连串两两之间的弹性碰撞（elastic collision）。当 $\lambda = 2$ 时，最终速度是 $-\frac{1}{3}u$ 和 $\frac{2}{3}u$；当 $\lambda = 4$ 时，则是 $-0.6u$ 和 $0.4u$，与预测完全相符。当 $\lambda = \frac{1}{2}$ 时，模拟结束时 $A_n$ 和 $A_{n+1}$ 分别以 $\frac{1}{3}u$ 和 $\frac{4}{3}u$ 运动，与 (i) 吻合。

## 常见错误

- 解了两条守恒方程便停下来。每一部分都取决于所得的解在物理上是否可能，即取决于各速度的正负，以及弹珠会否互相穿过。
- 在 (i) 中保留 $w = 0$、$v = u$ 这个根。这个根只是描述碰撞之前的运动。
- 忘记了在 (ii) 中，正是 $n \geq 3$ 保证了 $A_{n-1}$ 后面有一颗静止的 $A_{n-2}$。

## STEP 之外

对于一列互相接触的弹珠，单凭两条守恒定律并不能确定结果。这道题真正要问的是：在众多满足守恒量的解之中，哪些在物理上是可能的。要在它们之间作出选择，就需要一个更仔细的接触模型，例如一连串两两之间的碰撞，或把弹珠当作刚硬的弹簧。把弹珠当作弹簧来建立模型，就会引向质点链中的波动理论。Kleppner 与 Kolenkow 的 *An Introduction to Mechanics*（力学导论）就是以这种精神讲解碰撞和守恒定律的。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。