详细解答

STEP II 1990，第 13 题

力学 · 杆的平衡

STEP II 1990，第 13 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/90-s2-q13

关键思路

由于钉子光滑（smooth）而绳子为轻绳（light），绳上各处的张力（tension）都相同，所以杆受到两个相等的拉力，分别沿 PO 和沿 QO 方向。它们的合力（resultant）平分角 POQ，而要达致平衡（equilibrium），这个合力必须与重量沿同一条铅垂线互相抵销。因此，过 O 的铅垂线就是角 POQ 的角平分线，并且通过 G，余下的工作交给角平分线定理（angle bisector theorem）便可。至于那个不等式，其实只是说三角形 OPQ 是一个真正的三角形。

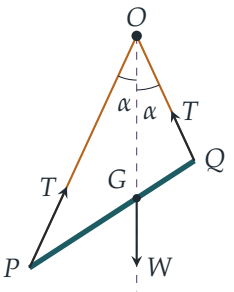
解答

求 OP 和 OQ

把杆模型化为一枝刚性杆，其重心（centre of gravity）为 G，其中 $PG = a + d$ 及 $GQ = a - d$；我们取 $0 \leq d < a$，使得 G 位于杆上，在中点靠 Q 的一侧（或正好在中点）。绳子是不可伸长（inextensible）的轻绳，钉子细小而光滑，所以 OP 和 OQ 两段绳的张力 T 相同，并且

$$OP + OQ = 2b.$$

作用在杆上的力只有三个：作用于 G 的重量 W、在 P 处沿 PO 方向的张力 T，以及在 Q 处沿 QO 方向的张力 T。



两个张力的作用线相交于 O，所以（对 O 取力矩（moments））重量的作用线也必须通过 O：过 O 的铅垂线通过 G。此外，两个张力的大小相等，所以它们的合力指向两个单位向量之和的方向，这两个单位向量一个沿 PO，一个沿 QO，而这正是两者夹角的平分线方向。这个合力必须是铅垂的，才能与 W 平衡。因此铅垂线 OG 平分角 POQ；把每一半记作 α。

想一想 知道 OG 平分角 POQ，能告诉我们关于各长度的甚么资料?

在三角形 OPQ 中应用角平分线定理，由 O 引出的角平分线把 PQ 按邻边之比分割：

$$\frac{OP}{OQ} = \frac{PG}{GQ} = \frac{a+d}{a-d}.$$

（直接的看法：三角形 OPG 和 OQG 有共同的由 O 引出的高，所以它们的面积之比为 $PG : GQ$；而它们的面积又分别是 $\frac{1}{2}\,OP \cdot OG \sin\alpha$ 和 $\frac{1}{2}\,OQ \cdot OG \sin\alpha$。）所以对某个 $k > 0$，有 $OP = k(a+d)$ 及 $OQ = k(a-d)$，而由 $OP + OQ = 2b$ 得 $2ka = 2b$，故 $k = b/a$：

$$OP = \frac{b(a+d)}{a}, \qquad OQ = \frac{b(a-d)}{a}.$$

不等式

设 $\theta = \angle POQ = 2\alpha$。由于杆并非铅垂，$O$ 不在直线 PQ 上，所以 OPQ 是一个真正的三角形，且 $0 < \theta < \pi$。以 $PQ = 2a$ 代入余弦定理（cosine rule），得

$$\begin{aligned} 4a^2 &= OP^2 + OQ^2 - 2\,OP \cdot OQ \cos\theta \\ &= \frac{b^2}{a^2}\Big[(a+d)^2 + (a-d)^2 - 2(a^2-d^2)\cos\theta\Big] \\ &= \frac{2b^2}{a^2}\Big[(a^2+d^2) - (a^2-d^2)\cos\theta\Big]. \end{aligned}$$

现在，因为 $\theta \neq 0$，所以 $\cos\theta < 1$；又因为 $d < a$，所以 $a^2 - d^2 > 0$。于是

$$4a^2 > \frac{2b^2}{a^2}\Big[(a^2+d^2) - (a^2-d^2)\Big] = \frac{4b^2d^2}{a^2},$$

亦即 $b^2d^2 < a^4$。取正平方根（其中 $b > 0$，$d \geq 0$），得 $bd < a^2$，所以

$$d < \frac{a^2}{b},$$

这正是所要证明的结果。

换一个等价的说法，这就是三角不等式（triangle inequality）$OP - OQ < PQ$：这里 $OP - OQ = 2bd/a$，而 $2bd/a < 2a$ 正是同一个条件。（另一个不等式 $\cos\theta > -1$ 给出 $OP + OQ > PQ$，即 $b > a$，这只是说绳子的长度足以绕过钉子而已。）

验算

- 若 $d = 0$（均匀杆），则 $OP = OQ = b$，杆水平悬挂，正如对称性所要求的；不等式 $0 < a^2/b$ 自动成立。
- 当 $d \to a^2/b$ 时，$OP - OQ \to 2a = PQ$，三角形被压扁，杆变成铅垂：超过这个值之后，杆唯一的悬挂方式就是铅垂悬挂。
- 取 $a = 1$，$b = 2$，$d = 0.3$：$OP = 2.6$，$OQ = 1.4$，$\cos\theta \approx 0.648$。把这个三角形摆放成 OG 为铅垂，两个张力的水平分量互相抵销，而对 O 的力矩在机器精度之内平衡。对绳子的所有位置逐一扫描，确认了这是唯一的非铅垂平衡位置，并且一旦 $d \geq a^2/b$ 便不存在这样的位置。

常见错误

- 假设两段绳的张力不同。绳子绕过光滑钉子时，两段的张力相等，而正是这一点令 OG 成为角平分线。
- 把角平分线的比例弄反了：较长的一段绳 OP 连接的是离 G 较远的一端。
- 以为这个平衡是稳定的。事实上它是不稳定的：当 $d = 0$ 时，水平的杆的 G 在 $\sqrt{b^2 - a^2}$ 的距离处位于 O 之下，而铅垂悬挂时则在其下方 b 的距离处，位置更低。题目只问及平衡。

STEP 之外

相对于杆而言，O 的轨迹（locus）是一个以 P 和 Q 为焦点（foci）的椭圆，而平衡位置就是 G 的高度取驻值之处。这就是虚功原理（principle of virtual work），由此可以通往拉格朗日力学（Lagrangian mechanics）。它也解释了为甚么相等的张力会平分夹角：这正是椭圆的反射性质。Kleppner 与 Kolenkow 合著的 *An Introduction to Mechanics*（力学入门教科书）是进一步学习静力学和稳定性的好选择。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。