详细解答

# STEP II 1990，第 12 题

力学 · 恢复系数与抛体

**STEP II 1990，第 12 题**

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

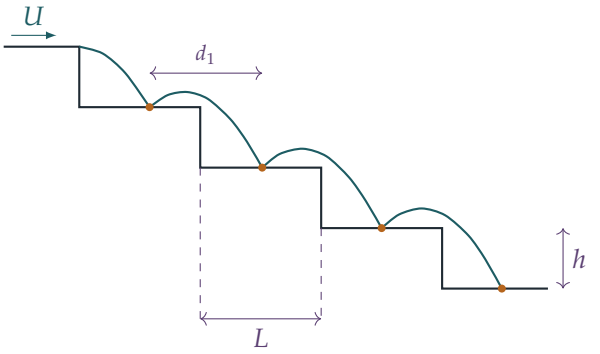
step.maths.org/questions/90-s2-q12

## 关键思路

楼梯是光滑（smooth）的，所以水平速度永远不变：它始终是 $U$，而每一段水平距离都只是 $U$ 乘以一段飞行时间。真正要花工夫的是垂直方向的运动：每次反弹令垂直速率乘以 $e$，而每下降 $h$ 则令其平方增加 $2gh$。由此可得每次反弹时垂直速率的平方所满足的一个简单递推关系（recurrence）。至于最后一部分，想想反弹点必须落在哪里：在一道无穷无尽的楼梯上，每一级恰好落一次。

## 解答

我们把质点（particle）看成一个点，在两次反弹之间只受重力作用；又把楼梯看成光滑的水平面，每一级比上一级低 $h$，相邻梯级边缘的水平距离为 $L$。



### 相邻两次反弹之间的距离

**水平运动**。楼梯是光滑的，所以梯级每次施加的冲量（impulse）都纯粹沿垂直方向，而在两次反弹之间唯一的力就是重力。因此水平速度任何时候都是 $U$，一段历时 $T$ 的飞行所走的水平距离为 $UT$。

**垂直运动**。设 $w_n$ 为质点第 $n$ 次反弹时撞上梯级的（向下）速率。质点离开最高一级时没有垂直速度，然后下跌 $h$，所以

$$w_1^2 = 2gh.$$

在第 $n$ 次反弹时，由于梯级固定不动，根据牛顿恢复定律（Newton's law of restitution），质点以速率 $ew_n$ 向上弹起。之后它必须落在低 $h$ 的下一级上，所以由 $v^2 = u^2 + 2as$（取向下为正，位移为 $+h$）得：

$$w_{n+1}^2 = e^2 w_n^2 + 2gh.$$

由 $w_1^2 = 2gh$ 出发，反复应用这关系，

$$\begin{aligned} w_n^2 &= 2gh\left(1 + e^2 + e^4 + \cdots + e^{2(n-1)}\right) \\ &= 2gh\,\frac{1-e^{2n}}{1-e^2} = 2gh\,\alpha_n^2, \end{aligned}$$

这里用了等比级数（geometric series）求和（因 $e^2 \neq 1$ 而成立）。所以 $w_n = \sqrt{2gh}\,\alpha_n$ 对每个 $n \geq 1$ 都成立；用归纳法（induction）简单验证一下便可使论证严谨，因为 $e^2 \cdot 2gh\,\alpha_n^2 + 2gh = 2gh\big(e^2\alpha_n^2 + 1\big)$，而 $e^2\alpha_n^2 + 1 = \dfrac{e^2 - e^{2n+2} + 1 - e^2}{1-e^2} = \alpha_{n+1}^2$。

> **想一想** 由第 $n$ 次反弹到第 $(n+1)$ 次反弹，飞行时间有多长?

垂直速度以恒定的变率 $g$（向下）改变。它开始时是向上的 $ew_n$，结束时是向下的 $w_{n+1}$，所以总共改变了 $ew_n + w_{n+1}$，飞行时间为

$$T_n = \frac{ew_n + w_{n+1}}{g} = \frac{\sqrt{2gh}}{g}\left(e\alpha_n + \alpha_{n+1}\right) = \left(\frac{2h}{g}\right)^{\frac{1}{2}}\left(e\alpha_n + \alpha_{n+1}\right).$$

（这样便不必解一条关于 $T_n$ 的二次方程：我们早已知道末速率。）乘以水平速率 $U$，

$$d_n = U\left(\frac{2h}{g}\right)^{\frac{1}{2}}\left(e\alpha_n + \alpha_{n+1}\right),$$

正是所求。

### 一道很长的楼梯

由于 $0 \leq e < 1$，我们有 $e^{2n} \to 0$，所以当 $n \to \infty$ 时 $\alpha_n \to \dfrac{1}{\sqrt{1-e^2}}$，因此

$$d_n \to D = U\left(\frac{2h}{g}\right)^{\frac{1}{2}}\frac{1+e}{\sqrt{1-e^2}} = U\left(\frac{2h}{g}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{1+e}{1-e}\right)^{\frac{1}{2}},$$

其中用了 $1-e^2=(1-e)(1+e)$。

**想一想** 为甚么这个极限距离必须恰好等于 $L$?

由最高一级的边缘起沿水平方向量度 $x$。下面第一级占据 $0\le x\le L$，一般而言，最高一级以下的第 $n$ 级占据 $(n-1)L\le x\le nL$。质点在每一级上都反弹一次，所以它第 $n$ 次反弹的位置（设为 $x_n$）满足

$$(n-1)L\le x_n\le nL,\qquad \text{所以}\qquad \frac{x_n}{n}\to L,\ \text{当}n\to\infty.$$

另一方面，$x_n=x_1+d_1+d_2+\cdots+d_{n-1}$，而 $d_k\to D$。若 $D>L$，则由某一项起，每个 $d_k$ 都比 $L$ 大至少一个固定的量，于是质点每反弹一次，便相对梯级边缘多走一段固定距离，最终会越过某一级而不落在其上；若 $D<L$，质点则逐步落后，最终会在同一级上落两次。（严格来说，各项趋向 $D$ 时，其平均值 $x_n/n$ 亦趋向 $D$。）无论是哪种情况，只要楼梯够长，质点都不会每级恰好反弹一次。所以对于很大的 $N$，我们需要 $D=L$:

$$U\left(\frac{2h}{g}\right)^{\frac12}\left(\frac{1+e}{1-e}\right)^{\frac12}=L\quad\Longrightarrow\quad U=\left(\frac{L^2g}{2h}\right)^{\frac12}\left(\frac{1-e}{1+e}\right)^{\frac12},$$

正是所求。

## 验算

- 特殊值。$\alpha_1=1$，所以 $d_1=U\sqrt{2h/g}\,(e+\sqrt{1+e^2})$。当 $e=0$ 时，质点每次反弹后垂直方向完全停下，所以每段飞行都只是下跌 $h$ 的自由下落，需时 $\sqrt{2h/g}$：果然 $d_n=U\sqrt{2h/g}$，而最后的条件变成 $U\sqrt{2h/g}=L$，完全符合预期。
- 量纲。$\sqrt{2h/g}$ 是时间，所以 $d_n$ 是长度；$\sqrt{L^2g/h}$ 是速率。
- 数值检验。对随机选取的 $U$、$h$ 和 $e$（取 $g=9.8$）以数值方法逐步模拟这运动，所得的每个 $d_n$ 与公式相差都在 $10^{-6}$ 以内。取 $e=\frac12$、$L=0.3$ 和 $h=0.2$，公式给出 $U\approx0.857$，而其后的反弹位置在 2000 级楼梯上都依次落在相继的梯级上。

## 常见错误

- 把每次反弹都当成由静止下跌 $h$，或由上一次反弹的高度下跌：质点每次反弹后都会上升，所以它的垂直速率会一级一级地累积起来。
- 写成 $w_{n+1}=ew_n+\sqrt{2gh}$：相加的是速率的平方，而不是速率本身。

## STEP 之外

最后一部分其实是一个关于平均值的命题：若 $d_n \to D$，则其累计平均值亦满足 $\frac{1}{n}\sum d_k \to D$（切萨罗定理，Cesàro's theorem），这是实分析（real analysis）入门阶段的一道标准习题。还要留意，关于 $U$ 的条件是*必要*（necessary）条件，而非充分（sufficient）条件：最初几次反弹的距离比 $L$ 短，而若 $e$ 接近 1，累积起来的差额可以超过起步时领先的 $x_1$，那么任何发射速率都行不通。想看数列极限的严谨处理，可参阅 Abbott 的 *Understanding Analysis*；至于碰撞的力学，可参阅 Kleppner 与 Kolenkow 的 *An Introduction to Mechanics*。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。