详细解答

STEP II 1990，第 11 题

力学 · 角动量守恒

STEP II 1990，第 11 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/90-s2-q11

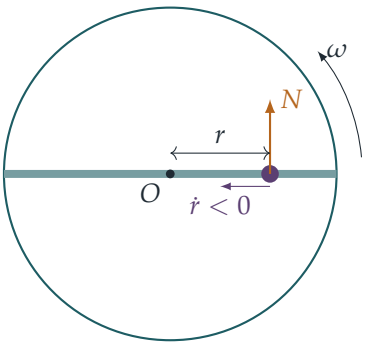
关键思路

圆盘与质点合起来是一个系统：对垂直轴没有外力矩（torque），亦没有外力作功，所以有两个量守恒：对该轴的角动量（angular momentum）和动能（kinetic energy）。由这两条方程可直接求得 ω 和 $\mathrm{d}r/\mathrm{d}t$。把两个变率相除便可消去时间，得出一条描述路径的可分离变量方程（separable equation），即 r 作为 θ 的函数。

解答

模型

把质点视为置于光滑凹槽内的点质量，并假设转轴光滑（轴承无摩擦）。从上方俯视，质点位于凹槽上距离 r 处，沿凹槽方向的速度为 $\dot{r}$，垂直于凹槽方向的速度为 $r\omega$，其中 $\omega = \dot{\theta}$。



质点所受的水平力只有凹槽的反作用力 N，方向垂直于凹槽（凹槽光滑，故沿凹槽方向没有分量）。圆盘则受到 $-N$。

角动量

重力和垂直方向的反作用力均与转轴平行，而光滑的转轴不施加力矩，所以对转轴的总角动量是常数。圆盘的贡献是 $mk^2\omega$，质点的贡献是 $m\,r\cdot r\omega = mr^2\omega$。与 $t=0$ 时比较：

$$mk^2\omega + mr^2\omega = mk^2\Omega + ma^2\Omega \quad\Longrightarrow\quad \omega = \frac{\Omega(k^2+a^2)}{k^2+r^2}.$$

能量

> **想一想** 质点横向移动时，反作用力 N 正好横向推它。这样不会改变动能吗？

它会改变质点的动能，但不会改变总动能。N 对质点作功的功率为 $N\cdot r\omega$，而作用于圆盘上大小相等、方向相反的力，作用点同样在距离 r 处，产生力矩 $-Nr$，故作功的功率为 $-Nr\omega$。两者互相抵消，所以总动能守恒：

$$\tfrac{1}{2}mk^2\omega^2 + \tfrac{1}{2}m(\dot r^2 + r^2\omega^2) = \tfrac{1}{2}mk^2\Omega^2 + \tfrac{1}{2}m(V^2 + a^2\Omega^2).$$

因此

$$\dot r^2 = V^2 + (k^2+a^2)\Omega^2 - (k^2+r^2)\omega^2.$$

利用已知条件 $V^2 = \Omega^2 a^2(k^2+a^2)/k^2$，

$$V^2 + (k^2+a^2)\Omega^2 = \Omega^2(k^2+a^2)\,\frac{a^2+k^2}{k^2} = \frac{\Omega^2(k^2+a^2)^2}{k^2},$$

而由角动量的结果可得 $(k^2+r^2)\omega^2 = \Omega^2(k^2+a^2)^2/(k^2+r^2)$。于是

$$\dot r^2 = \Omega^2(k^2+a^2)^2\left(\frac{1}{k^2} - \frac{1}{k^2+r^2}\right) = \frac{\Omega^2(k^2+a^2)^2\,r^2}{k^2(k^2+r^2)}.$$

质点向转轴移动时，$\dot r < 0$，所以取负平方根（其中 $r>0$）：

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = -\frac{\Omega r(k^2+a^2)}{k(k^2+r^2)^{1/2}},$$

这正是所求。

路径

由于 $\omega = \mathrm{d}\theta/\mathrm{d}t > 0$，由链式法则（chain rule）得

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta} = \frac{\mathrm{d}r/\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\theta/\mathrm{d}t} = -\frac{\Omega r(k^2+a^2)}{k(k^2+r^2)^{1/2}}\cdot\frac{k^2+r^2}{\Omega(k^2+a^2)} = -\frac{r(k^2+r^2)^{1/2}}{k},$$

即 $k\,\mathrm{d}r/\mathrm{d}\theta = -r(k^2+r^2)^{1/2}$。留意 Ω 和 a 已经消失。

现在设 $u = 1/r$，则 $\mathrm{d}r/\mathrm{d}\theta = -u^{-2}\,\mathrm{d}u/\mathrm{d}\theta$，而 $r(k^2+r^2)^{1/2} = u^{-2}(1+k^2u^2)^{1/2}$（因为 $u > 0$）。方程变成

$$k\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\theta} = \sqrt{1+k^2u^2}.$$

这个平方根提示我们使用双曲代换（hyperbolic substitution）：设 $ku = \sinh\phi$。那么 $k\,\mathrm{d}u/\mathrm{d}\theta = \cosh\phi\,\mathrm{d}\phi/\mathrm{d}\theta$，且 $\sqrt{1+\sinh^2\phi} = \cosh\phi$，所以

$$\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}\theta} = 1 \quad\Longrightarrow\quad \phi = \theta + \alpha.$$

当 $\theta = 0$ 时 $r = a$，所以 $\sinh\alpha = ku = k/a$。因此 $k/r = \sinh(\theta+\alpha)$，即

$$r\sinh(\theta+\alpha) = k, \qquad \sinh\alpha = \frac{k}{a}.$$

质点永远不会到达转轴

> **想一想** 当 $\theta \to \infty$ 时，$r = k/\sinh(\theta+\alpha)$ 趋向 0。圆盘有可能在有限时间内转过无限大的角度吗?

不可能。由于 $r^2 \geq 0$，$\omega = \Omega(k^2+a^2)/(k^2+r^2) \leq \Omega(k^2+a^2)/k^2$，所以到时间 t 为止，圆盘转过的角度最多为 $\theta \leq \Omega(k^2+a^2)t/k^2$，这是有限的。对任何有限的 θ，$\sinh(\theta+\alpha)$ 都是有限的，所以 $r = k/\sinh(\theta+\alpha) > 0$。此外，对每个 $r > 0$，$\dot{r}$ 都严格为负，所以质点永远不会停下来再折返：这些公式对所有 t 都成立，而 r 不断减小并趋向 0，却永远不会到达。

（另一做法是直接从 $\mathrm{d}r/\mathrm{d}t$ 的方程入手：由 a 走到 r 所需的时间为 $\frac{k}{\Omega(k^2+a^2)}\int_r^a \frac{\sqrt{k^2+x^2}}{x}\,\mathrm{d}x$，而在 $x = 0$ 附近，被积函数的表现有如 k/x，其积分在 $r \to 0$ 时以对数方式发散（diverge）。）

验算

- 在 $t = 0$ 时，$r = a$ 给出 $\omega = \Omega$ 和 $\dot{r} = -\Omega a\sqrt{k^2+a^2}/k = -V$，与初始数据吻合；而 $\theta = 0$ 给出 $r = k/\sinh\alpha = a$。
- 当 θ 很大时，$r \approx 2k\mathrm{e}^{-(\theta+\alpha)}$：质点以指数方式螺旋向内，与永远不会到达的结论一致。
- 数值上，对随机选取的 k, a, Ω 逐步计算运动方程（$\ddot{r} = r\omega^2$，角动量固定），所得的 $\dot{r}$、能量和 $r\sinh(\theta+\alpha) = k$ 均吻合至约 10^{-12}。取 $k = a = \Omega = 1$ 时，到达 $r = 10^{-8}$ 所需的时间约为 9.32，增长方式有如 $\frac{1}{2}\ln(1/r)$。

常见错误

- 以为质点本身的能量守恒：凹槽的反作用力对质点作功，守恒的只是总能量。

- 在质点的动能或角动量中漏掉横向速度 $r\omega$。
- 只凭 θ 有限时 $r > 0$ 便断定质点永远不会到达转轴，却没有检查 θ 在有限时间内是否保持有限。

STEP 之外

关于 V 的特殊条件，令质点恰好落在永远向 $r = 0$ 缓缓靠近的轨迹上：在旋转参考系（rotating frame）中，$r = 0$ 是一个不稳定平衡点（unstable equilibrium），而这条轨迹就是它的*稳定流形*（*stable manifold*）。V 只要稍大一点，质点便会穿过中心；稍小一点，质点便会折返。这类想法，连同耦合物体的守恒定律，可见于 Kleppner 与 Kolenkow 所著的 *An Introduction to Mechanics*。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。