详细解答

STEP II 1990，第 10 题

纯数学 · 矩阵多项式方程

> **STEP II 1990，第 10 题**
>
> 继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：
>
> step.maths.org/questions/90-s2-q10

关键思路

行列式（determinant）把矩阵（matrix）的乘积化为普通数字的乘积，而实数的乘积为零，必定是其中一个因子为零。至于那个三次式，$\mathbf{M}$ 与 $\mathbf{I}$ 可交换（commute），所以 $\mathbf{M}$ 的矩阵多项式的因式分解，与 x 的多项式完全一样。上三角矩阵（upper triangular matrix）的表现则十分理想：乘积的对角线元素就是各对角线元素的乘积，所以对角线很快便可处理好，只有右上角才需要真正花工夫。

解答

满足 $\mathbf{AB} = 0$ 的矩阵

由于乘积的行列式等于行列式的乘积，

$$\det \mathbf{A}\ \det \mathbf{B} = \det(\mathbf{AB}) = \det \mathbf{0} = 0.$$

左方是两个实数的乘积，所以其中至少一个为零：$\det \mathbf{A} = 0$，或 $\det \mathbf{B} = 0$，或两者皆为零。这就是所需的结果。

若 $\det \mathbf{B} \neq 0$，则 $\mathbf{B}^{-1}$ 存在，把 $\mathbf{AB} = \mathbf{0}$ 右乘 $\mathbf{B}^{-1}$，得

$$\mathbf{A} = \mathbf{ABB}^{-1} = \mathbf{0}\,\mathbf{B}^{-1} = \mathbf{0}.$$

所以 $\mathbf{A}$ 必定是零矩阵（zero matrix）。

不过，两个行列式皆为零并不足够。取

$$\mathbf{A} = \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

则 $\det \mathbf{A} = \det \mathbf{B} = 0$，但 $\mathbf{AB} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq \mathbf{0}$。

三次式的因式分解

首先把多项式 $f(x) = x^3 + 2x^2 - 5x - 6$ 因式分解。试代 6 的细小因数：

$$\begin{aligned} f(-1) &= -1 + 2 + 5 - 6 = 0, \\ f(2) &= 8 + 8 - 10 - 6 = 0, \\ f(-3) &= -27 + 18 + 15 - 6 = 0, \end{aligned}$$

由于首项系数为 1，所以 $f(x) = (x+1)(x-2)(x+3)$。

现在展开 $(\mathbf{M} + p\mathbf{I})(\mathbf{M} + q\mathbf{I})(\mathbf{M} + r\mathbf{I})$。因为 $\mathbf{I}$ 与 $\mathbf{M}$ 可交换（而且 $\mathbf{I}^2 = \mathbf{I}$），展开的结果与数字的情况完全相同：

$$\mathbf{M}^3 + (p+q+r)\mathbf{M}^2 + (pq+qr+rp)\mathbf{M} + pqr\,\mathbf{I}.$$

与上面的多项式比较，我们可取

$$p = 1, \qquad q = -2, \qquad r = 3$$

(次序不拘), 于是对任何方阵 $\mathbf{M}$, 都有 $\mathbf{M}^3 + 2\mathbf{M}^2 - 5\mathbf{M} - 6\mathbf{I} = (\mathbf{M}+\mathbf{I})(\mathbf{M}-2\mathbf{I})(\mathbf{M}+3\mathbf{I})$。

> ? **想一想** 我们现在可否断定三个因子之中必有一个是零矩阵?

不可以。第一部分已经说明，矩阵的乘积可以为零，而没有任何一个因子为零；我们只知道至少有一个因子是奇异（singular）的。所以我们必须动手计算。

上三角矩阵的解

设 $\mathbf{M} = \begin{pmatrix} a & c \\ 0 & b \end{pmatrix}$。每个因子都是上三角矩阵，而且右上角的元素同样是 c：

$$\mathbf{M} + k\mathbf{I} = \begin{pmatrix} a+k & c \\ 0 & b+k \end{pmatrix}.$$

对于三个对角线为 (d_i, e_i)、右上角元素全为 c 的上三角矩阵，乘开后得

$$\begin{aligned} &\begin{pmatrix} d_1 & c \\ 0 & e_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_2 & c \\ 0 & e_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_3 & c \\ 0 & e_3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} d_1 d_2 d_3 & c\,(d_1 d_2 + d_1 e_3 + e_2 e_3) \\ 0 & e_1 e_2 e_3 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

取 $d_1, d_2, d_3 = a+1, a-2, a+3$ 及 $e_1, e_2, e_3 = b+1, b-2, b+3$，方程便化为三个条件：

$$\begin{aligned}(a+1)(a-2)(a+3) &= 0,\\ (b+1)(b-2)(b+3) &= 0,\\ c\,[(a+1)(a-2)+(a+1)(b+3)+(b-2)(b+3)] &= 0.\end{aligned}$$

头两个条件表示 $a, b \in \{-1, 2, -3\}$。把第三个条件中的括号展开，

$$(a^2-a-2)+(ab+3a+b+3)+(b^2+b-6) = a^2+ab+b^2+2(a+b)-5.$$

> **想一想** 要看出这个括号何时为零，有没有比逐一试验全部九对数值更聪明的方法?

有。若 $a \neq b$，括号等于

$$\frac{a^3-b^3}{a-b}+2\,\frac{a^2-b^2}{a-b}-5\,\frac{a-b}{a-b} = \frac{f(a)-f(b)}{a-b},$$

由于 $f(a) = f(b) = 0$，此式为 0。所以当 $a \neq b$ 时，无论 c 是甚么，第三个条件都成立。若 $a = b$，括号等于 $3a^2+4a-5 = f'(a)$。在 $a = -1, 2, -3$ 时，其值分别为 -6、15 和 10（全部不为零，因为 f 有三个相异的根），所以第三个条件迫使 $c = 0$。

因此，解为：

- $\mathbf{M} = \begin{pmatrix} a & c \\ 0 & b \end{pmatrix}$，其中 a 和 b 是 $\{-1, 2, -3\}$ 中两个不同的数，而 c 是任意实数（共六族）；
- 三个纯量矩阵（scalar matrix）$-\mathbf{I}$、$2\mathbf{I}$ 和 $-3\mathbf{I}$（即 $a = b$ 的情况，此时必有 $c = 0$）。

验算

取 $a = -1$、$b = 2$、$c = 5$。则 $\mathbf{M}+\mathbf{I} = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$、$\mathbf{M}-2\mathbf{I} = \begin{pmatrix} -3 & 5 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ 及 $\mathbf{M}+3\mathbf{I} = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$。头两个的乘积已经是 $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$，所以无论 c 取何值，整个乘积都是零。另一方面，$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ 给出 $\mathbf{M}^3+2\mathbf{M}^2-5\mathbf{M}-6\mathbf{I} = \begin{pmatrix} 0 & 15 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq \mathbf{0}$，与 $f'(2) = 15$ 吻合。以电脑搜索大量有理数 a, b, c，所得的解恰好就是上述各解；因式分解亦已用随机的 3×3 整数矩阵验证。

常见错误

- 由 $(\mathbf{M}+\mathbf{I})(\mathbf{M}-2\mathbf{I})(\mathbf{M}+3\mathbf{I})=\mathbf{0}$ 断定 $\mathbf{M}$ 必定是 $-\mathbf{I}$、$2\mathbf{I}$ 或 $-3\mathbf{I}$。第一部分正是为了提醒你不要犯这个错。
- 遗漏 $a=b$ 的情况，或以为在这情况下 c 同样可以任意取值。
- 为第一部分举例时，不慎写出一个 $\mathbf{AB}=\mathbf{0}$ 的例子；要检查你的乘积确实不是零。

STEP 之外

这个答案让我们初次窥见最小多项式（minimal polynomial）：一个矩阵满足某个具相异根的多项式，当且仅当它可对角化（diagonalisable），而且其特征值（eigenvalue）都在这些根之中。我们那些 $a\neq b$ 的解，对任何 c 都可对角化；而 $\begin{pmatrix} a & c \\ 0 & a \end{pmatrix}$ 在 $c\neq 0$ 时则不可对角化，这正是它不成立的原因。右上角出现的均差（divided difference）$\big(f(a)-f(b)\big)/(a-b)$，在 $a=b$ 时变成 $f'(a)$，一般的矩阵函数正是这样定义的。Strang 的 *Introduction to Linear Algebra*（线性代数入门）对特征值和对角化有清晰的讲解。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。