详细解答

STEP II 1990，第 1 题

纯数学 · 多项式不等式

> **STEP II 1990，第 1 题**
>
> 继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：
>
> step.maths.org/questions/90-s2-q1

关键思路

没有实根（real roots）的四次多项式（quartic），其实就是一个恒为正的四次多项式，所以我们要设法把它拆成若干个我们确知为非负（non-negative）的部分：完全平方（perfect square），或者在某个区间（interval）上正负号一目了然的乘积。没有哪一种拆法能处处适用，但不同的拆法在不同的区间上奏效，合起来便覆盖整条实数线。第一部分把这些部件直接交给我们；到了最后一部分，就要自己动手去找。

解答

两个非负的表达式

把四次式因式分解（factorise），并对二次式配方（completing the square），

$$x^4 - 2x^3 + x^2 = x^2\left(x^2 - 2x + 1\right) = x^2(x-1)^2,$$
$$x^2 - 8x + 17 = (x-4)^2 + 1.$$

第一个是两个平方的乘积，所以对任何实数 x 都 ≥ 0。第二个是一个平方加 1，所以至少是 1，自然也是非负的。

第一个方程

设 $p(x) = x^4 - 2x^3 + x^2 - 8x + 17$。留意 p 并不是上面两个表达式之和（那个和含有 $2x^2$，而不是 x^2），所以不能简单地把两者相加。我们改为在每个区间上用不同的方式拆开 p，从而证明 $p(x) > 0$ 处处成立。

想一想 题目给了两个非负的表达式，但它们加起来并不等于 $p(x)$。我们还可以怎样利用它们?

两者都可以在实数线的某一段上“借用”：在一个区间上，我们保留四次式 $x^2(x-1)^2$，然后直接处理余下的 $17-8x$；在另一个区间上，我们保留二次式 $(x-4)^2+1$，然后直接处理余下的 x^4-2x^3。

情况 $x \le 0$。 这时 $x^4 \ge 0$、$-2x^3 \ge 0$（因为 $x^3 \le 0$）、$x^2 \ge 0$ 以及 $-8x \ge 0$。所以 $p(x)$ 的每一项都是非负的，再加上常数项 17，总和至少是 17。因此 $p(x) > 0$。

情况 $0 < x \le 2$。 写成

$$p(x) = x^2(x-1)^2 + (17-8x).$$

第一部分 ≥ 0，而由于 $x \le 2$，我们有 $17-8x \ge 17-16 = 1$。所以 $p(x) \ge 1 > 0$。

情况 $x > 2$。 写成

$$p(x) = x^3(x-2) + \left(x^2 - 8x + 17\right) = x^3(x-2) + (x-4)^2 + 1.$$

由于 $x > 2$，x^3 和 $x-2$ 都是正数，所以 $x^3(x-2) > 0$；而 $(x-4)^2+1 \ge 1$。所以 $p(x) > 1 > 0$。

这三个区间覆盖了所有实数，而在每个区间上都有 $p(x) > 0$，所以 $p(x) = 0$ 没有实根。

第二个方程

设 $q(x) = x^4 - x^3 + x^2 - 4x + 4$。我们沿用同样的方法，不过这次要自己选择拆法。

想一想 应该在哪里把实数线分段？又应该把哪些项配成一组?

我们希望每一组在各自的区间上都有明显的正负号。$4-4x = 4(1-x)$ 这一组在 $x \le 1$ 时是非负的。当 $x \ge 1$ 时，$x^4 - x^3 = x^3(x-1)$ 这一组是非负的，而余下的 $x^2 - 4x + 4 = (x-2)^2$ 是一个完全平方。所以最自然的分界点是 $x = 1$。

情况 $x \le 1$。 写成

$$q(x) = \left(x^4 - x^3 + x^2\right) + 4(1-x) = x^2\left[\left(x - \tfrac{1}{2}\right)^2 + \tfrac{3}{4}\right] + 4(1-x).$$

第一项 ≥ 0，而且只在 $x = 0$ 时才等于零（方括号内的值至少是 $\frac{3}{4}$）。第二项因 $x \le 1$ 而 ≥ 0，而且只在 $x = 1$ 时才等于零。两项不可能同时为零，所以 $q(x) > 0$。

情况 $x \geq 1$。 写成

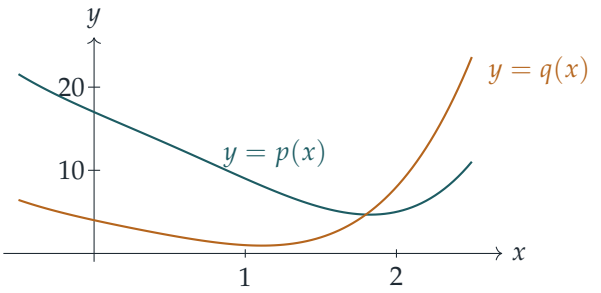
$$q(x) = x^3(x-1) + \left(x^2 - 4x + 4\right) = x^3(x-1) + (x-2)^2.$$

当 $x \geq 1$ 时，x^3 和 $x-1$ 都是非负的，所以第一项 ≥ 0，而且只在 $x = 1$ 时才等于零。第二项是一个平方，只在 $x = 2$ 时才等于零。两者同样不可能同时为零，所以 $q(x) > 0$。

所以对所有实数 x 都有 $q(x) > 0$，而 $q(x) = 0$ 没有实根。

验算

- 把每一种拆法展开，确保它确实还原成 p 或 q。例如 $x^3(x-1) + (x-2)^2 = x^4 - x^3 + x^2 - 4x + 4$。
- 在 $-5 \leq x \leq 8$ 的范围内以 10^{-4} 为步长作数值扫描，得出 p 的最小值约为 4.67（在 $x \approx 1.83$ 附近），而 q 的最小值约为 0.94（在 $x \approx 1.11$ 附近）。两者都明显是正数，正如下图所示。



常见错误

- 把题目给出的两个表达式相加，然后声称其和就是 $p(x)$：其实并不是，因为 x^2 项对不上。
- 由“非负项加非负项”就断定 $q(x) > 0$。这样只能得出 $q(x) \geq 0$；要排除有根的可能，必须证明两项不可能同时为零。
- 以为 $-2x^3$ 或 $-8x$ 永远是负数。当 $x \leq 0$ 时，它们非但无害，反而有帮助。

STEP 之外

把多项式（polynomial）写成平方和（sum of squares）来证明它是正的，是一个很有份量的课题。每一个非负的单变量多项式，都是两个实系数多项式的平方之和，但希尔伯

特（Hilbert）证明了这个结论在多变量的情况下并不成立，由此引出了他的第十七个问题。时至今日，人们在最优化（optimisation）问题中会利用电脑去搜索这类分解。如果想学习更多这一类不等式技巧，Siklos 的 *Advanced Problems in Mathematics* 是下一步的好选择。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。