详细解答

STEP I 1990，第 9 题

纯数学 • 切线与面积的界限

> **STEP I 1990，第 9 题**
>
> 继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：
>
> step.maths.org/questions/90-s1-q9

关键思路

曲线 $y = 1/x$ 向上弯曲（即它是凸（convex）的），所以每一条切线（tangent）都位于曲线之下。因此，两条切线下方的两个梯形（trapezium）都包含在曲线下方由 $x = 1$ 至 $x = b$ 的区域之内，而该区域的面积为 $\ln b$。比较这两个面积，便得到对数的下界（lower bound）。同样道理，一个位于曲线之上的长方形则给出上界（upper bound）。

解答

点 C

对于 $y = 1/x$，我们有 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -1/x^2$。所以在 $(t, 1/t)$ 的切线为

$$y - \frac{1}{t} = -\frac{1}{t^2}(x - t), \qquad \text{即} \qquad y = \frac{2}{t} - \frac{x}{t^2}.$$

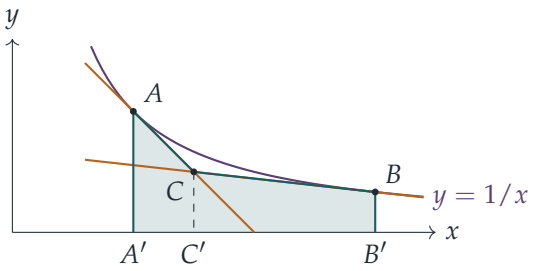
取 $t = 1$，在 A 的切线为 $y = 2 - x$。取 $t = b$，在 B 的切线为 $y = \frac{2}{b} - \frac{x}{b^2}$。在两线相交之处，

$$2 - x = \frac{2}{b} - \frac{x}{b^2} \quad \Longrightarrow \quad x\left(1 - \frac{1}{b^2}\right) = 2\left(1 - \frac{1}{b}\right).$$

由于 $b > 1$，我们可以除以 $1 - \frac{1}{b} \neq 0$，余下 $x\left(1 + \frac{1}{b}\right) = 2$。因此

$$C = \left(\frac{2b}{b+1}, \frac{2}{b+1}\right),$$

其中 y 坐标由 $y = 2 - x$ 求得。注意 $1 < \frac{2b}{b+1} < b$：左边的不等式（inequality）即 $b + 1 < 2b$，右边的即 $2 < b + 1$。两者皆因 $b > 1$ 而成立，所以 C 在水平方向上位于 A 与 B 之间。



此图按 $b = 3$ 绘画。阴影区域由该两个四边形（quadrilateral）组成。

面积之和

每个四边形都有两条铅垂的边，所以它是梯形，其面积等于阔度乘以两条铅垂边的平均值。

对于 $ACC'A'$，阔度为 $\frac{2b}{b+1} - 1 = \frac{b-1}{b+1}$，而两条铅垂边分别为 1 和 $\frac{2}{b+1}$：

$$\text{面积}(ACC'A') = \frac{1}{2} \cdot \frac{b-1}{b+1}\left(1 + \frac{2}{b+1}\right) = \frac{(b-1)(b+3)}{2(b+1)^2}.$$

对于 $CBB'C'$，阔度为 $b - \frac{2b}{b+1} = \frac{b(b-1)}{b+1}$，而两条铅垂边分别为 $\frac{2}{b+1}$ 和 $\frac{1}{b}$：

$$\text{面积}(CBB'C') = \frac{1}{2} \cdot \frac{b(b-1)}{b+1}\left(\frac{2}{b+1} + \frac{1}{b}\right) = \frac{(b-1)(3b+1)}{2(b+1)^2}.$$

两式相加，分子合并为 $(b-1)(4b+4) = 4(b-1)(b+1)$，所以

$$\text{面积}(ACC'A') + \text{面积}(CBB'C') = \frac{2(b-1)}{b+1}.$$

不等式

> ? **想一想** 为甚么两个梯形必定包含在曲线之下?

对于 $x > 0$，曲线与在 $(t, 1/t)$ 的切线之间的差距为

$$\frac{1}{x} - \left(\frac{2}{t} - \frac{x}{t^2}\right) = \frac{t^2 - 2tx + x^2}{t^2 x} = \frac{(x-t)^2}{t^2 x} \geq 0.$$

所以对所有 $x > 0$，每条切线都位于曲线上或曲线之下。阴影区域的上边界，在 $[1, \frac{2b}{b+1}]$ 上是在 A 的切线，在 $[\frac{2b}{b+1}, b]$ 上是在 B 的切线。两段都位于 $y = 1/x$ 之下，而该区域位于 x 轴之上。所以阴影区域包含在曲线下方由 $x = 1$ 至 $x = b$ 的区域之内，而

$$\frac{2(b-1)}{b+1} \leq \int_1^b \frac{\mathrm{d}x}{x} = \ln b.$$

至于上界，当 $x \geq 1$ 时 $\frac{1}{x} \leq 1$，所以曲线下方的区域位于以 $A'B'$ 为底、高为 1 的长方形之内。因此

$$\ln b = \int_1^b \frac{\mathrm{d}x}{x} \leq \int_1^b 1\,\mathrm{d}x = b - 1.$$

现设 $z > 0$ 并取 $b = 1 + z$，于是 $b > 1$，符合要求。这时 $b - 1 = z$ 及 $b + 1 = 2 + z$，两个不等式合起来就是

$$\frac{2z}{2+z} \leq \ln(1+z) \leq z,$$

这正是我们要证明的结果。（事实上，当 $z > 0$ 时两个不等式都是严格的，因为曲线与作为边界的直线只在孤立的点相交。）

验算

- 当 $b = 1$ 时，C 会是 $(1, 1) = A$，而面积之和会是 0，与预期相符。
- 当 $b = 2$ 时：$C = (\frac{4}{3}, \frac{2}{3})$，面积之和为 $\frac{2}{3} \approx 0.667$，仅略小于 $\ln 2 \approx 0.693$，而后者又小于 1。
- 对于细小的 z，$\frac{2z}{2+z} = z - \frac{z^2}{2} + \cdots$ 与 $\ln(1+z) = z - \frac{z^2}{2} + \cdots$ 直至 z^2 项都一致，所以下界在 0 附近非常精确。

我们以精确运算对若干个 b 值验算了坐标和两个梯形的面积，并对 10^5 个介乎 10^{-6} 与 10^6 之间的随机 z 值验算了该不等式。

常见错误

- 忘记检查 C 是否位于 $x = 1$ 与 $x = b$ 之间。缺少这一步，那些“四边形”未必是你所想像的形状。
- 声称“从图中可见”切线位于曲线之下。用 $(x - t)^2$ 作出的那一行计算，才令它成为一个证明。

STEP 之外

用简单的图形从上方和下方与函数的图像作比较，正是黎曼和（Riemann sum）背后的想法，也是大学第一门分析（analysis）课程中严格定义积分的方法。凸函数（convex function）的切线位于其图像之下，这个事实是凸函数理论的起点。由此可推出延森不等式（Jensen's inequality）以及许多经典不等式，包括算术平均—几何平均不等式（AM–GM）。Abbott 的 *Understanding Analysis*（一本分析入门教科书）正是按这种精神建立积分理论的。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。