详细解答

STEP I 1990，第 8 题

纯数学 · 三角函数无穷乘积

> **STEP I 1990，第 8 题**
>
> 继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：
>
> step.maths.org/questions/90-s1-q8

关键思路

二倍角公式（double-angle formula）$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$ 可把每个余弦化成两个正弦之比：$\cos\theta = \dfrac{\sin 2\theta}{2\sin\theta}$。把这些比值相乘，几乎所有项都会互相抵消，情况就如裂项相消的和（telescoping sum）一样。一旦把有限乘积化成一个简洁的分数，令 $n \to \infty$ 时便只需用到标准极限（limit）：当 $x \to 0$ 时 $\dfrac{\sin x}{x} \to 1$。

解答

关于 α 的条件

以下每一步都要除以某个 $m \geq 0$ 所对应的 $\sin(\alpha/2^m)$，所以必须确保这些值永不为零。若 $\sin(\alpha/2^m) = 0$，则对某个整数 j 有 $\alpha/2^m = j\pi$，于是 $\alpha = (2^m j)\pi$ 是 π 的整数倍，而这种情况已被排除。因此对所有 $m \geq 0$ 都有 $\sin(\alpha/2^m) \neq 0$。

两个余弦的乘积

两次运用 $\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$，先取 $\theta = \alpha/2$，再取 $\theta = \alpha/4$，得

$$\begin{aligned}\sin\alpha &= 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}\\ &= 2\left(2\sin\frac{\alpha}{4}\cos\frac{\alpha}{4}\right)\cos\frac{\alpha}{2} = 4\sin\frac{\alpha}{4}\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{4}.\end{aligned}$$

由于 $\sin(\alpha/4) \neq 0$，我们可以除以 $4\sin(\alpha/4)$，得出

$$\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{4} = \frac{\sin\alpha}{4\sin(\alpha/4)},$$

这正是所需的结果。

n 个余弦的乘积

记 $P_n = \cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{4}\cdots\cos\frac{\alpha}{2^n}$。我们对 n 用归纳法（induction）证明

$$P_n = \frac{\sin\alpha}{2^n\sin(\alpha/2^n)}.$$

当 $n=1$ 时，上式即 $\cos\frac{\alpha}{2} = \dfrac{\sin\alpha}{2\sin(\alpha/2)}$，也就是把二倍角公式除以 $2\sin(\alpha/2)\neq 0$ 所得的结果。（$n=2$ 的情况就是刚才证明的结果。）

现假设公式对某个 $n \geq 1$ 成立。在二倍角公式中取 $\theta = \alpha/2^{n+1}$，得 $\sin\frac{\alpha}{2^n} = 2\sin\frac{\alpha}{2^{n+1}}\cos\frac{\alpha}{2^{n+1}}$。因此

$$\begin{aligned} P_{n+1} = P_n\cos\frac{\alpha}{2^{n+1}} &= \frac{\sin\alpha}{2^n\sin(\alpha/2^n)}\cos\frac{\alpha}{2^{n+1}} \\ &= \frac{\sin\alpha\,\cos(\alpha/2^{n+1})}{2^n\cdot 2\sin(\alpha/2^{n+1})\cos(\alpha/2^{n+1})} = \frac{\sin\alpha}{2^{n+1}\sin(\alpha/2^{n+1})}. \end{aligned}$$

约去 $\cos(\alpha/2^{n+1})$ 是合理的：它是 $\sin(\alpha/2^n)$ 的一个因子，而后者不为零，所以它本身也不为零。这正是 $n+1$ 时的公式，故由归纳法可知，公式对所有正整数 n 都成立。

令 $n\to\infty$

无穷乘积（infinite product）的意思，是部分积（partial products）P_n 的极限。设 $x_n = \alpha/2^n$，则当 $n\to\infty$ 时 $x_n\to 0$，并且

$$2^n\sin\frac{\alpha}{2^n} = \alpha\cdot\frac{\sin x_n}{x_n} \longrightarrow \alpha\cdot 1 = \alpha.$$

想一想 为甚么可以放心地把 $\lim P_n = \dfrac{\sin\alpha}{\alpha}$ 上下倒转?

因为这个极限不是零：对我们所考虑的 α，有 $\alpha\neq 0$ 及 $\sin\alpha\neq 0$。所以 $P_n\to\dfrac{\sin\alpha}{\alpha}\neq 0$，无穷乘积存在，而以它除 $\sin\alpha$ 便得

$$\frac{\sin\alpha}{\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{4}\cos\frac{\alpha}{8}\cdots} = \lim_{n\to\infty}\frac{\sin\alpha}{P_n} = \lim_{n\to\infty}2^n\sin\frac{\alpha}{2^n} = \alpha,$$

这就是所需的公式。

$\pi/2$ 的公式

取 $\alpha = \pi/2$，它不是 π 的整数倍，并留意 $\sin\alpha = 1$。于是

$$\frac{\pi}{2} = \frac{1}{\cos\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{8}\cos\frac{\pi}{16}\cdots}.$$

余下要证明的，是这些余弦正是那些嵌套平方根（nested square roots）。对 $k \geq 1$，记 $c_k = \cos(\pi/2^{k+1})$。那么 $c_1 = \cos\frac{\pi}{4} = \sqrt{\frac{1}{2}}$。在半角公式（half-angle formula）$\cos^2\theta = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2\theta$ 中取 $\theta = \pi/2^{k+2}$，得

$$c_{k+1}^2 = \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}c_k, \qquad \text{所以} \qquad c_{k+1} = \sqrt{\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}c_k},$$

这里取正根，是因为 $0 < \pi/2^{k+2} < \pi/2$，所以 $c_{k+1} > 0$。因此

$$c_1 = \sqrt{\tfrac{1}{2}}, \quad c_2 = \sqrt{\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\sqrt{\tfrac{1}{2}}}, \quad c_3 = \sqrt{\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\sqrt{\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\sqrt{\tfrac{1}{2}}}}, \quad \ldots,$$

而每个因子都是把前一个因子代入 $t \mapsto \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}t}$ 所得。这些正好就是所需乘积中的各个因子，所以

$$\frac{\pi}{2} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2}}\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}}\cdots}.$$

验算

- 取 $\alpha = \pi/2$ 及 $n = 1$，有限乘积的公式给出 $\cos\frac{\pi}{4} = \dfrac{1}{2\sin(\pi/4)} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$，结果正确。
- 嵌套根式（nested radicals）各部分积的倒数依次为 1.4142、1.5307、1.5607、1.5683、1.5702,…；乘到第 60 个因子后得到 1.5707963267949，在机器精度之内与 $\pi/2$ 吻合。
- 对随机选取的 α 以及不超过 14 的 n，有限乘积的恒等式在数值上同样成立；而对 $\alpha = 2.5$ 和 $\alpha = -4$ 等数值，$\sin\alpha/P_{60}$ 也能重现 α。

常见错误

- 除以 $\sin(\alpha/2^n)$ 而没有说明它为何不为零。这正是设下条件 $\alpha \neq k\pi$ 的原因。
- 写出 $1/\lim P_n = \lim(1/P_n)$ 而没有指出 $\lim P_n \neq 0$。
- 在半角公式一步中，忘记说明为何取正平方根。

STEP 之外

最后的公式就是 1593 年的韦达（Viète）乘积，是历史上第一个写下来的 π 的精确无穷表达式。到了大学，你会在分析学（analysis）中正式学习无穷乘积：若一个由非零因子组成的乘积，其部分积趋向一个非零的极限，便称该乘积收敛（converge），而这正是我

们刚才检查过的一点。欧拉（Euler）的乘积 $\sin\alpha = \alpha\prod_{k\geq 1}\left(1-\frac{\alpha^2}{k^2\pi^2}\right)$ 则是与它一脉相承而更为深刻的结果。Abbott 的 *Understanding Analysis* 是一本平易近人的书，可以从中看到这些极限如何得到严谨的处理。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。