详细解答

STEP I 1990，第 7 题

纯数学 · 一阶线性常微分方程

> **STEP I 1990，第 7 题**
>
> 继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：
>
> step.maths.org/questions/90-s1-q7

关键思路

设 $y = uv$ 之后，我们有两个未知函数，但其实只需要一个，所以大可对其中一个多加一个条件。最自然的选择，是让 u 消去含 P 的那一项，余下的微分方程（differential equation）便可直接积分。这其实是乔装了的积分因子法（integrating-factor method）：$1/u$ 正正就是积分因子。

解答

代换

设 $y = uv$，由乘积法则（product rule）得 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = u\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} + v\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$，于是方程变成

$$u\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} + v\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} + Pu\right) = Q.$$

如果我们选取 u 使它满足一阶方程（first order equation）

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} + Pu = 0,$$

括号内的式子便等于零，余下

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} = \frac{Q}{u},$$

这正是题目所要求的、只以 x、Q 和 u 表示 $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}$ 的方程。（要作除法，必须有 $u \neq 0$；$u' + Pu = 0$ 的非零解是 $u = A\mathrm{e}^{-\int P\,\mathrm{d}x}$，其中 $A \neq 0$，这些解永不为零。）

题中的方程

这里 $P=-\dfrac{2}{x+1}$，$Q=(x+1)^{5/2}$。留意 Q 只在 $x\geq -1$ 时才有定义（作为实数），而 P 在 $x=-1$ 处没有定义，所以我们在 $x>-1$ 上求解，此时 $x+1>0$。

> ? **想一想** 我们需要 u 的通解（general solution）吗？还是任何一个解都可以？

任何一个非零解都可以：最终答案中的任意常数，会在积分求 v 时出现。于是我们用分离变量法（separating variables）解

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=\frac{2u}{x+1}$$

得 $\ln|u|=2\ln(x+1)+$ 常数，并取

$$u=(x+1)^2.$$

（验算：$u'=2(x+1)=\frac{2u}{x+1}$。）于是

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}=\frac{(x+1)^{5/2}}{(x+1)^2}=(x+1)^{1/2},\qquad \text{所以}\qquad v=\tfrac{2}{3}(x+1)^{3/2}+C.$$

因此通解是

$$y=uv=\tfrac{2}{3}(x+1)^{7/2}+C(x+1)^2.$$

代入 $y(1)=0$：

$$0=\tfrac{2}{3}\cdot 2^{7/2}+4C\quad\Longrightarrow\quad C=-\tfrac{1}{6}\cdot 2^{7/2}=-\tfrac{1}{6}\cdot 8\sqrt{2}=-\frac{4\sqrt{2}}{3}.$$

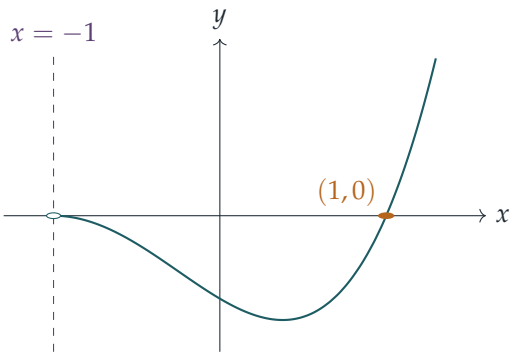
所以

$$\boxed{y=\tfrac{2}{3}(x+1)^{7/2}-\tfrac{4\sqrt{2}}{3}(x+1)^2=\tfrac{2}{3}(x+1)^2\left[(x+1)^{3/2}-2\sqrt{2}\right]}$$

解在何处成立

> ? **想一想** y 的公式在 $x=-1$ 处是有意义的。为甚么不把 $x=-1$ 包括在内？

这个解在 $x>-1$ 时成立。当 $x<-1$ 时，右边的 $(x+1)^{5/2}$ 不是实数，所以微分方程本身在那里毫无意义（我们的 $(x+1)^{7/2}$ 也一样）。在 $x=-1$ 处，$\frac{2y}{x+1}$ 这一项没有定义，所以方程在那里同样不成立，尽管按我们的公式，当 $x\to -1^+$ 时 $y\to 0$。在整个区间 $x>-1$ 上，由于 $x+1>0$，上面每一步都站得住脚，而且解经过题目给定的点 $x=1$，这一点正在此区间之内。



空心圆圈标示被排除的端点 $x=-1$。

验算

- 代回原方程：$y'=\frac{7}{3}(x+1)^{5/2}-\frac{8\sqrt{2}}{3}(x+1)$，而 $\frac{2y}{x+1}=\frac{4}{3}(x+1)^{5/2}-\frac{8\sqrt{2}}{3}(x+1)$；两者之差是 $(x+1)^{5/2}$，符合要求。
- $y(1)=\frac{2}{3}\cdot 4\left(2\sqrt{2}-2\sqrt{2}\right)=0$。
- 特殊值：$y(0)=\frac{2-4\sqrt{2}}{3}\approx -1.219$，$y(3)=\frac{256-64\sqrt{2}}{3}\approx 55.16$。由 $y(1)=0$ 出发，对方程作数值积分（龙格—库塔法，Runge–Kutta），所得结果与这两个值吻合至九位有效数字。

常见错误

- 弄错 P 的正负号：这里 $P=-\frac{2}{x+1}$，所以 $u=(x+1)^2$，而不是 $(x+1)^{-2}$。
- 积分求 v 时漏掉常数，结果没有余地去满足 $y(1)=0$。
- 把范围写成 $x\geq -1$：方程在 $x=-1$ 处没有定义。

STEP 之外

选取 u 来消去麻烦的一项，正是*参数变易法*（variation of parameters）背后的想法：先解齐次方程（homogeneous equation），然后让那个“常数”变动起来，以吸收外加项（forcing）。同样的技巧也适用于二阶线性方程；至于解在何处成立这个问题，则发展成存在与唯一性定理（existence and uniqueness theorem），它保证在 P 和 Q 皆连续的任何区间上都有唯一的解。Boyce 与 DiPrima 的 *Elementary Differential Equations*（微分方程入门教科书）对两者都有论述。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。