详细解答

STEP I 1990，第 6 题

纯数学 · 向量与平行四边形

STEP I 1990，第 6 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/90-s1-q6

关键思路

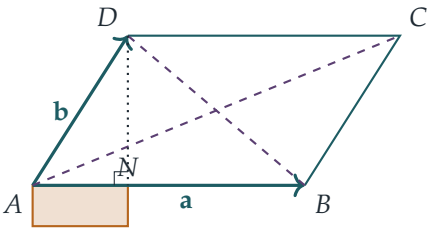
把原点设在 A，并用两条边的向量（vector）$\mathbf{a} = \overrightarrow{AB}$ 和 $\mathbf{b} = \overrightarrow{AD}$ 来描述一切。这样，两条对角线（diagonal）就是 $\mathbf{a}+\mathbf{b}$ 和 $\mathbf{b}-\mathbf{a}$，而每个长度的平方都是一个向量与自身的点积（dot product）。把这些点积展开，整道题就解决了。唯一用到的几何事实是：$|\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}|$ 等于 $\mathbf{u}$ 的长度乘以 $\mathbf{v}$ 在 $\mathbf{u}$ 上的投影（projection）的长度。

解答

取 A 为原点，设 $\overrightarrow{AB} = \mathbf{a}$ 及 $\overrightarrow{AD} = \mathbf{b}$。由于 $ABCD$ 是平行四边形（parallelogram），$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD} = \mathbf{b}$，所以

$$\overrightarrow{AC} = \mathbf{a}+\mathbf{b}, \qquad \overrightarrow{BD} = \mathbf{b}-\mathbf{a}.$$

对任何向量都有 $|\mathbf{v}|^2 = \mathbf{v}\cdot\mathbf{v}$，而且点积是对称的，并对加法满足分配律。记 $a = |\mathbf{a}|$ 及 $b = |\mathbf{b}|$。



图中，N 是由 D 到直线 AB 的垂足，所以 AN 是 AD 在 AB 上的投影，其长度为 $|\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}|/a$。

第 (i) 部分

对边相等，所以左方等于 $2a^2 + 2b^2$。至于对角线，

$$AC^2 = (\mathbf{a}+\mathbf{b})\cdot(\mathbf{a}+\mathbf{b}) = a^2 + 2\,\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} + b^2,$$
$$BD^2 = (\mathbf{b}-\mathbf{a})\cdot(\mathbf{b}-\mathbf{a}) = a^2 - 2\,\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} + b^2.$$

两式相加，交叉项互相抵消，得 $AC^2 + BD^2 = 2a^2 + 2b^2 = AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2$，这正是所要证明的。（这个结果通常称为平行四边形定律（parallelogram law）。）

第 (ii) 部分

这次改为把同样的两式相减，

$$AC^2 - BD^2 = 4\,\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}, \qquad \text{所以} \qquad \left|AC^2 - BD^2\right| = 4\,|\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}|.$$

现在来解释 $|\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}|$ 的意义。若 θ 是 $\mathbf{a}$ 与 $\mathbf{b}$ 之间的夹角，则 $|\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}| = a\cdot b|\cos\theta|$，而 $b|\cos\theta|$ 正好是 AD 在 AB 上的投影的长度 AN。所以 $|\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}|$ 就是以 AB 和 AD 在 AB 上的投影为边的长方形（图中的阴影部分）的面积。

> **想一想** 题目声称这个结果对任何一条边和它任何一条邻边都成立。为甚么我们不需要分别做八次计算？

平行四边形的每条边都是向量 $\pm\mathbf{a}$ 或 $\pm\mathbf{b}$，而与它相邻的两条边，除了正负号之外，就是另一个向量。例如，边 BC 是 $\mathbf{b}$，它的邻边 AB 和 CD 分别是 $\mathbf{a}$ 和 $-\mathbf{a}$。改变正负号并不会改变向量的长度，也不会改变投影的长度，因为投影的长度是 $|\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}|/|\mathbf{u}|$。所以无论选哪一条边和哪一条邻边，所得的长方形面积都同样是 $|\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}|$：它或是 $a\times$ (向量$\mathbf{b}$ 投影于$\mathbf{a}$)，或是 $b\times$ (向量$\mathbf{a}$ 投影于$\mathbf{b}$)，而两者都等于 $|\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}|$。因此，在所有情况下，

$$\left|AC^2 - BD^2\right| = 4\times(\text{该长方形的面积}). \qquad \blacksquare$$

最后部分

第 (ii) 部分来自两条边的点积。现在把边和对角线的角色对调，考虑两条对角线的点积：

$$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD} = (\mathbf{a}+\mathbf{b})\cdot(\mathbf{b}-\mathbf{a}) = b^2 - a^2,$$

因为交叉项 $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$ 和 $-\mathbf{b}\cdot\mathbf{a}$ 互相抵消。因此

$$\left|AB^2 - AD^2\right| = |\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}|.$$

仿照第 (ii) 部分的论证，便得到以下结果。

结果。$\left|AB^2 - AD^2\right|$ 等于以下长方形的面积：它的两边分别是任何一条对角线，以及另一条对角线在它上面的投影。

证明。若 φ 是两条对角线之间的夹角，则 $|\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}| = AC\cdot BD\,|\cos\varphi|$。这里 $BD\,|\cos\varphi|$ 是 BD 在 AC 上的投影的长度，而 $AC\,|\cos\varphi|$ 是 AC 在 BD 上的投影的长度。所以无论从哪一条对角线出发，面积都相同，而且由上面的式子可知它等于 $\left|AB^2 - AD^2\right|$。■

想让它看起来更像 (ii)，可设 O 为两条对角线互相平分的那一点。这样 $AC = 2OA$，而 BD 在 AC 上的投影是 OB 在 OA 上的投影的两倍。所以 $\left|AB^2 - AD^2\right|$ 也等于以 OA 和 OB 在 OA 上的投影为边的长方形面积的 4 倍：半条对角线现在担当了边的角色。

由此还可得出两个漂亮的推论（corollary）。两条对角线相等，当且仅当 $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = 0$，亦即当且仅当该平行四边形是长方形。两条对角线互相垂直，当且仅当 $a = b$，亦即当且仅当它是菱形（rhombus）。

验算

取 $A = (0,0)$、$B = (4,0)$、$D = (1,2)$，所以 $C = (5,2)$。这样 $AC^2 = 29$ 及 $BD^2 = 13$，而 $2(16+5) = 42 = 29+13$，验证了 (i)。至于 (ii)，$AC^2 - BD^2 = 16$，而 AD 在 AB 上的投影长度为 1，所以长方形的面积是 $4\times 1 = 4$，而 $16 = 4\times 4$。至于最后部分，$AB^2 - AD^2 = 16 - 5 = 11$，而 $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD} = (5,2)\cdot(-3,2) = -11$。我们还用 10^5 个随机平行四边形，就每一种边和邻边的选法测试了全部三个结果；最大的偏差约为 10^{-13}，只是舍入误差而已。

常见错误

- 写成 $\overrightarrow{BD} = \mathbf{a} - \mathbf{b}$ 或 $\mathbf{a} + \mathbf{b}$。正负号对 BD^2 没有影响，但把方向写对可以避免之后出现混乱。
- 忘记取绝对值：当 A 处的角是钝角时，$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$ 是负数，但面积不可能是负数，所以题目写的是 $\left|AC^2 - BD^2\right|$。
- 在最后部分用了整条对角线，却写上因子 4。用整条对角线时因子是 1；只有用半条对角线时才会出现因子 4。

STEP 之外

恒等式 $|\mathbf{a}+\mathbf{b}|^2 - |\mathbf{a}-\mathbf{b}|^2 = 4\,\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$ 就是极化恒等式（polarisation identity）：它表明单凭长度就可以还原出点积。它与第 (i) 部分的平行四边形定律一起，是关于内积空间（inner product space）的关键事实。一个范数（norm）来自某个内积，当且仅当它满足平行四边形定律，这是约当（Jordan）与冯·诺伊曼（von Neumann）的一条定理。Strang 的 *Introduction to Linear Algebra*（线性代数入门）是个好去处，可以看到点积、投影和正

交性（orthogonality）如何在任意维数中发展出来。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。