详细解答

STEP I 1990，第 5 题

纯数学 · 部分分式与曲线描绘

STEP I 1990，第 5 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/90-s1-q5

关键思路

在 (i) 中，二次式可以因式分解，所以用部分分式（partial fractions）便可把积分化为两个对数之差。在 (ii) 中，巨大的幂次看似吓人，但 $1760 = 8 \times 220$，所以这个函数其实就是 $u^8 - u + q$，其中 $u = x^{220} \geq 0$。图像的形状由驻点（stationary points）决定，而根的数目只取决于横轴相对于局部极大值（local maximum）和两个极小值的位置。

解答

第 (i) 部分

由于 $6 \times 15 = 90 = 9 \times 10$ 而 $9 + 10 = 19$，这个二次式可分解为：

$$6x^2 + 19x + 15 = (2x + 3)(3x + 5).$$

设

$$\frac{1}{(2x+3)(3x+5)} = \frac{A}{2x+3} + \frac{B}{3x+5}, \qquad \text{所以} \qquad 1 = A(3x+5) + B(2x+3).$$

代入 $x = -\frac{3}{2}$ 得 $\frac{1}{2}A = 1$，所以 $A = 2$；代入 $x = -\frac{5}{3}$ 得 $-\frac{1}{3}B = 1$，所以 $B = -3$。$2x+3$ 和 $3x+5$ 在 $[1,3]$ 上都是正数，所以无须加上绝对值符号：

$$\int_1^3 \frac{\mathrm{d}x}{6x^2+19x+15} = \int_1^3 \left(\frac{2}{2x+3} - \frac{3}{3x+5}\right)\mathrm{d}x = \Big[\ln(2x+3) - \ln(3x+5)\Big]_1^3$$
$$= \ln\frac{9}{14} - \ln\frac{5}{8} = \ln\frac{72}{70} = \ln\frac{36}{35}.$$

第 (ii) 部分

*对称性与两端的变化。*两个幂次都是偶数，所以 f 是偶函数（even function），其图像对称于 y 轴。当 $|x|$ 很大时，x^{1760} 一项占主导，所以当 $x \to \pm\infty$ 时 $\mathrm{f}(x) \to +\infty$。此外，$\mathrm{f}(0) = q$ 而 $\mathrm{f}(\pm 1) = q$。

*驻点。*求导得

$$\mathrm{f}'(x) = 1760x^{1759} - 220x^{219} = 220\,x^{219}(8x^{1540} - 1).$$

它在 $x = 0$ 处以及 $x^{1540} = \frac{1}{8}$ 之处为零，后者即 $x = \pm a$，其中

$$a = 8^{-1/1540} \approx 0.9987.$$

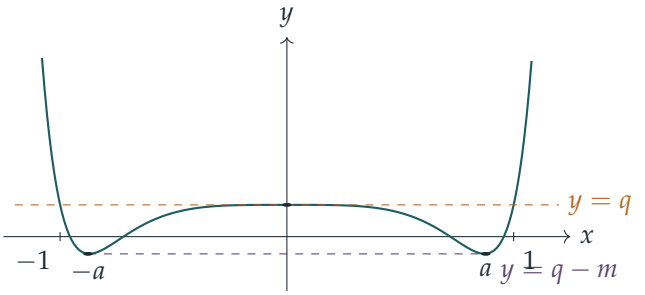
当 $x > 0$ 时，$\mathrm{f}'(x)$ 的正负号与 $8x^{1540} - 1$ 相同：在 $(0, a)$ 上为负，在 $x > a$ 时为正。由于 x^{219} 是奇数次幂，当 $x < 0$ 时正负号刚好相反。所以 f 在 $(-\infty, -a)$ 上递减，在 $(-a, 0)$ 上递增，在 $(0, a)$ 上递减，在 (a, ∞) 上递增：在 $x = 0$ 处有局部极大值 q，在 $x = \pm a$ 处有两个相等的极小值。

> **想一想** 怎样才能求出极小值，而不必跟 $8^{-1/1540}$ 纠缠?

改用 $u = x^{220}$ 来计算。在 $x = \pm a$ 处有 $x^{1540} = u^7 = \frac{1}{8}$，所以 $u = 8^{-1/7}$，而 $u^8 = u \cdot u^7 = \frac{1}{8}u$。因此

$$\mathrm{f}(\pm a) = u^8 - u + q = q - \tfrac{7}{8}u = q - m, \qquad \text{其中} \qquad m = \tfrac{7}{8} \cdot 8^{-1/7} = 7 \cdot 2^{-24/7} \approx 0.650.$$

*草图。*图像呈“W”形：它从高处开始，下降至 $x = -a$ 处的极小值 $q - m$，上升至原点处的局部极大值 q，再下降至 $x = a$ 处的极小值 $q - m$，然后急剧上升。由于幂次极大，真实的图像极为平坦：除非 $|x|$ 非常接近 1，否则 x^{220} 极小，所以在 $(-1, 1)$ 的大部分范围内 $\mathrm{f}(x) \approx q$，只在 $x = \pm 1$（图像在该处回到高度 q）内侧不远处有两个狭窄的凹陷，而在外侧则是近乎垂直的陡壁。下图把凹陷夸大了，好让各项特征清楚可见。



计数根的数目。$\mathrm{f}(x) = 0$ 的根就是图像与 x 轴相交之处，所以我们把 0 与局部极大值 q 和极小值 $q - m$ 作比较。

- $q > m$：极小值 $q - m$ 为正，所以 $\mathrm{f} > 0$ 处处成立：**没有根**。
- $q = m$：图像只在极小值处与横轴相切：**两个根**，$x = \pm a$。
- $0 < q < m$：此时 $q - m < 0 < q$。在四个单调区间 $(-\infty, -a)$、$(-a, 0)$、$(0, a)$、(a, ∞) 的每一个上，f 都是连续（continuous）而且严格单调（strictly monotonic）的，并且由正值变为负值，或由负值变为正值，所以在每个区间上恰有一个根：**四个根**。
- $q = 0$：$\mathrm{f}(x) = x^{220}(x^{1540} - 1)$，它恰好在 $x = 0$ 和 $x = \pm 1$ 处为零：**三个根**。
- $q < 0$：局部极大值 $\mathrm{f}(0) = q$ 为负，所以在整个 $[-a, a]$ 上 $\mathrm{f} < 0$，而在 (a, ∞) 和 $(-\infty, -a)$ 的每一个上，f 都严格单调地由负值变至 $+\infty$：**两个根**。

所以相异根的数目可能是 0、2、3 和 4，其中

$$\begin{aligned} &0 \text{ 个根：} \quad q > m, \\ &2 \text{ 个根：} \quad q < 0 \text{ 或 } q = m, \\ &3 \text{ 个根：} \quad q = 0, \\ &4 \text{ 个根：} \quad 0 < q < m, \end{aligned} \qquad m = \tfrac{7}{8} \cdot 8^{-1/7} = 7 \cdot 2^{-24/7} \approx 0.650.$$

验算

对 (i) 的被积函数使用辛普森法则（Simpson's rule），得 0.0281709，与 $\ln \frac{36}{35} = 0.0281709$ 吻合。至于 (ii)，在 $x = 1$ 附近以细密的数值搜索求 $x^{1760} - x^{220}$ 的极小值，得出在 $x \approx 0.99865$ 处的 -0.650123，与 $-m$ 和 a 一致。取 $q = 1,\ 0.5,\ 0.1,\ 0.001,\ 0,\ -0.01,\ -5$，在细密的格点上计数 f 的变号次数，得出根的数目为 $0, 4, 4, 4, 3, 2, 2$，与上表的预测相符。$q = 0$ 的情况正好用来检验草图是否合理：图像必须通过原点和 $(\pm 1, 0)$。

常见错误

- 遗漏边界情况 $q = 0$（三个根，因为局部极大值正好落在横轴上）和 $q = m$（在极小值处有两个重根）。
- 当 $q < 0$ 时，“凭对称性”声称有两个根，却没有检查 $-a$ 与 a 之间是否别无变化：正是因为局部极大值 q 为负，才排除了该处有额外的根。
- 把草图画成一条弯度平缓的“W”。幂次这么大，图像在 $|x| < 1$ 时几乎平坦地停留在高度 q；即使草图夸大了凹陷，也值得把这一点说明。

STEP 之外

通过确定驻点处的函数值来计数根的数目，让人初尝介值定理（intermediate value theorem）和单调性论证的滋味，而这些内容会在大学第一门分析课程中严格建立起来；代换 $u = x^{220}$ 也显示出 x^n 在 $n \to \infty$ 时的表现：它在 $(-1, 1)$ 上收敛至 0，但并非一致收敛（uniform convergence）。Abbott 的 *Understanding Analysis*（《理解分析》）对连续性和一致收敛的处理既严谨又易读。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。