详细解答

STEP I 1990，第 4 题

纯数学 · 等差数列与差分

STEP I 1990，第 4 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/90-s1-q4

关键思路

数列的每一项，都等于首项加上各个差的累计总和。等差数列（arithmetic progression）的差是常数，所以求和很容易。至于双重等差数列（double arithmetic progression），各个差本身又构成一个等差数列，于是要多做一层求和，二项式系数（binomial coefficient）$\binom{n}{2}$ 和 $\binom{n}{3}$ 便自然出现。最后一部分则化为关于两个未知差的两条线性方程。

解答

等差数列

设公差（common difference）为 $d = a_2 - a_1$，则 $a_k = a_1 + (k-1)d$。于是

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = na_1 + d\sum_{k=1}^{n}(k-1) = na_1 + \frac{n(n-1)}{2}(a_2 - a_1),$$

其中用到 $0 + 1 + \cdots + (n-1) = \frac{1}{2}n(n-1)$。把 a_1 和 a_2 的项分别合并，得

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \frac{n}{2}[(3-n)a_1 + (n-1)a_2].$$

双重等差数列

设各个差为 $\delta_k = b_{k+1} - b_k$。它们构成一个等差数列，首项为 $p = \delta_1 = b_2 - b_1$，公差为

$$e = \delta_2 - \delta_1 = (b_3 - b_2) - (b_2 - b_1) = b_3 - 2b_2 + b_1.$$

因此 $\delta_j = p + (j-1)e$，把首 $k-1$ 个差加起来（即第一部分的公式，把 n 换成 $k-1$），得

$$b_k = b_1 + \sum_{j=1}^{k-1} \delta_j = b_1 + (k-1)p + \frac{(k-1)(k-2)}{2}\, e = b_1 + \binom{k-1}{1} p + \binom{k-1}{2} e.$$

现在对 $k = 1, \ldots, n$ 求和。我们需要两个和。第一个是 $\sum_{k=1}^{n}(k-1) = \binom{n}{2}$，与前面相同。至于第二个，令 $j = k-1$ 由 0 取到 $n-1$，则

$$\begin{aligned}\sum_{j=0}^{n-1} \frac{j(j-1)}{2} &= \frac{1}{2}\left[\frac{(n-1)n(2n-1)}{6} - \frac{(n-1)n}{2}\right] = \frac{n(n-1)}{12}[(2n-1)-3] \\ &= \frac{n(n-1)(n-2)}{6} = \binom{n}{3}.\end{aligned}$$

所以

$$\sum_{k=1}^{n} b_k = nb_1 + \binom{n}{2}(b_2 - b_1) + \binom{n}{3}(b_3 - 2b_2 + b_1).$$

这已经是一条以 n、b_1、b_2、b_3 表示的公式。如果你想分别看到每个 b_i 的系数，展开后得

$$b_1 + \cdots + b_n = \frac{n(n^2 - 6n + 11)}{6}\, b_1 + \frac{n(n-1)(7-2n)}{6}\, b_2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{6}\, b_3.$$

（快速检验：$n = 1, 2, 3$ 分别给出 b_1、$b_1 + b_2$ 和 $b_1 + b_2 + b_3$。）

想一想 有没有更简洁的方法看出 $\binom{n}{3}$ 从何而来?

有：$\binom{k-1}{2}$ 是从 $k-1$ 件东西中选 2 件的方法数目，而曲棍球棒恒等式（hockey-stick identity）$\sum_{k=1}^{n}\binom{k-1}{2} = \binom{n}{3}$（从 n 件中选 3 件时，先固定最大的一件 k）一步便完成求和。每多一层“差的差”，二项式系数便升高一级，正如积分把幂次升高一次。

阶乘数列

现在 $b_1 = 1$，而 p 和 e 如上所定，故 $b_k = 1 + (k-1)p + \frac{1}{2}(k-1)(k-2)e$。所以

$$b_2 = 1 + p, \qquad b_4 = 1 + 3p + 3e, \qquad b_6 = 1 + 5p + 10e.$$

在一个 $c_1 = b_2$、$c_2 = b_4$、$c_3 = b_6$、$c_4 = 220$ 的阶乘数列（factorial progression）中，相邻两项之差依次为 $1!\,d$、$2!\,d$、$3!\,d$，即 d、$2d$、$6d$：

$$\begin{aligned} b_4 - b_2 &= 2p + 3e = d, \\ b_6 - b_4 &= 2p + 7e = 2d, \\ 220 - b_6 &= 219 - 5p - 10e = 6d. \end{aligned}$$

把第一式代入第二式，得 $2p + 7e = 4p + 6e$，所以 $e = 2p$，继而 $d = 8p$。第三条方程变成

$$219 - 5p - 20p = 48p \quad \Longrightarrow \quad 73p = 219 \quad \Longrightarrow \quad p = 3,$$

所以 $e=6$ 及 $d=24$，符合非零的要求。由于每一步都是必然的，这个解是唯一的。

于是 $b_k = 1+3(k-1)+3(k-1)(k-2) = 3k^2-6k+4$，得出数列 $1,4,13,28,49,76,\ldots$，而 $b_2, b_4, b_6, 220 = 4, 28, 76, 220$ 的差确实是 $24, 48, 144 = 1!\cdot 24,\ 2!\cdot 24,\ 3!\cdot 24$。

最后，把 $b_1=1$、$b_2-b_1=3$ 和 $b_3-2b_2+b_1=6$ 代入求和公式：

$$\begin{aligned} 1+b_2+\cdots+b_n &= n+3\cdot\frac{n(n-1)}{2}+6\cdot\frac{n(n-1)(n-2)}{6} \\ &= \frac{n}{2}[2+3(n-1)+2(n-1)(n-2)] \\ &= \frac{n(2n^2-3n+3)}{2}. \end{aligned}$$

验算

当 $n=1,2,3$ 时，最后的公式给出 1、5 和 18，与 1、$1+4$ 和 $1+4+13$ 吻合。当 $n=6$ 时，公式给出 $3\cdot 57 = 171$，而直接计算亦得 $1+4+13+28+49+76=171$。此外，我们也用电脑以分数作精确运算，对数百个随机数列及所有 $n\le 24$ 验证了两条一般求和公式。

常见错误

- 把阶乘数列的差当作 $d, 2d, 3d$：它们其实是 $1!\,d$、$2!\,d$、$3!\,d$，所以第三个是 $6d$。
- 写成 $b_k = b_1 + kp + \ldots$：b_1 与 b_k 之间只有 $k-1$ 个差。

STEP 之外

这就是有限差分学（calculus of finite differences）：若一个数列的第 m 阶差是常数，它便是 n 的 m 次多项式，而它的部分和则是 $m+1$ 次多项式，最宜用 $\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \binom{n}{2}, \ldots$ 这组基来表示（牛顿（Newton）前向差分公式）。把 $\binom{n}{r}$ 求和而得 $\binom{n+1}{r+1}$，正是 $\int x^r\,\mathrm{d}x = \frac{x^{r+1}}{r+1}$ 的离散版本。想多做同类题目，可试试 Siklos 的 *Advanced Problems in Mathematics*（进阶数学难题集）中的问题。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。