详细解答

STEP I 1990，第 3 题

纯数学 · 法线与平行曲线

> **STEP I 1990，第 3 题**
>
> 继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：
>
> step.maths.org/questions/90-s1-q3

关键思路

只要把向下的单位法向量（unit normal）明确写出来，从而以 x 表示 $\mathbf{s}$ 的坐标，其余一切便水到渠成。第 (i) 部分只需迫使 $\mathbf{s}$ 的 y 坐标等于零。在第 (ii) 部分，题目建议的代换（substitution）令 $\mathbf{s}$ 的坐标变得非常简单，而斜率（gradient）条件则化为一条一阶微分方程（first-order differential equation），这条方程原来恰好是一个全导数（exact derivative）。

解答

准备工作。曲线 $y = \mathrm{f}(x)$ 的切线（tangent）方向为 $(1, \mathrm{f}'(x))$，所以法向量为 $\pm(\mathrm{f}'(x), -1)$。向下的那一个的 y 分量为负，故

$$\mathbf{n} = \frac{1}{N}\begin{pmatrix} \mathrm{f}'(x) \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad N = \sqrt{1 + \mathrm{f}'(x)^2},$$

因此

$$\mathbf{s} = \mathbf{r} + \mathrm{p}(x)\mathbf{n} = \begin{pmatrix} x + \dfrac{\mathrm{p}(x)\,\mathrm{f}'(x)}{N} \\ \mathrm{f}(x) - \dfrac{\mathrm{p}(x)}{N} \end{pmatrix}.$$

另外留意，由于 $\mathbf{n}$ 是单位向量，所以 $|\mathbf{r} - \mathbf{s}| = |\mathrm{p}(x)|$。

第 (i) 部分

这里 $\mathrm{f}(x) = x^k$，$\mathrm{f}'(x) = kx^{k-1}$，而 $N = \sqrt{1 + k^2 x^{2k-2}}$。要使 $\mathbf{s}$ 位于 x 轴上，它的 y 坐标必须为零：

$$x^k - \frac{\mathrm{p}(x)}{N} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \mathrm{p}(x) = x^k \sqrt{1 + k^2 x^{2k-2}}.$$

这样选取之后，$\mathbf{s}$ 的 x 坐标为

$$x + x^k \cdot kx^{k-1} = x + kx^{2k-1},$$

它是连续（continuous）而且递增的，当 $x \to 0^+$ 时趋向 0，当 $x \to \infty$ 时趋向无穷大。所以 $\mathbf{s}$ 确实扫过整条正 x 轴，而不只是其中一部分。

现在 $|\mathbf{r}|^2 = x^2 + x^{2k}$，而 $|\mathbf{r} - \mathbf{s}|^2 = \mathrm{p}(x)^2 = x^{2k} + k^2 x^{4k-2}$（这里 $\mathrm{p} > 0$）。所以对每一个 $x > 0$ 都有 $|\mathbf{r}| = |\mathbf{r} - \mathbf{s}|$，当且仅当

$$x^2 = k^2 x^{4k-2} \quad \text{对所有} x > 0.$$

取 $x = 1$ 便必有 $k^2 = 1$，所以 $k = 1$；反过来，$k = 1$ 时两边都等于 x^2。因此 $k = 1$。

从几何角度看：在直线 $y = x$ 上，由 (x, x) 出发的向下法线与 x 轴相交于 $(2x, 0)$，而以 O、(x, x)、$(2x, 0)$ 为顶点的三角形是等腰三角形（isosceles triangle），两条等边的长度均为 $\sqrt{2}\,x$。

第 (ii) 部分

现在 $\mathrm{f}(x) = x^2$，$\mathrm{f}'(x) = 2x$，而 $N = \sqrt{1 + 4x^2}$。写成 $\mathrm{p} = \mathrm{q}N$ 便可消去那些碍事的平方根：

$$\mathbf{s} = \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + 2x\,\mathrm{q}(x) \\ x^2 - \mathrm{q}(x) \end{pmatrix}.$$

新曲线是以 x 为参数（parameter）给出的，所以它在 $\mathbf{s}$ 的斜率为

$$\frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}X} = \frac{\mathrm{d}Y/\mathrm{d}x}{\mathrm{d}X/\mathrm{d}x} = \frac{2x - \mathrm{q}'}{1 + 2\mathrm{q} + 2x\mathrm{q}'}.$$

令它等于 $2x$，即 $y = x^2$ 在 $\mathbf{r}$ 的斜率，然后两边乘以分母：

$$2x - \mathrm{q}' = 2x + 4x\mathrm{q} + 4x^2\mathrm{q}'$$

$$\Longleftrightarrow \quad (1 + 4x^2)\,\mathrm{q}' + 4x\,\mathrm{q} = 0.$$

> **想一想** 我们能否不除以 q（它可能在某处为零）而解出这条方程?

可以：改为除以 $N = \sqrt{1 + 4x^2}$，它永不为零。由于 $N' = 4x/N$，

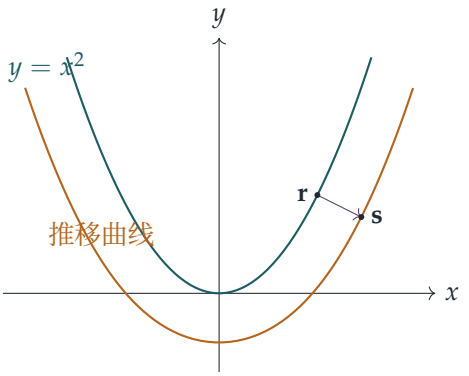
$$\frac{(1 + 4x^2)\,\mathrm{q}' + 4x\,\mathrm{q}}{N} = N\mathrm{q}' + \frac{4x}{N}\,\mathrm{q} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(N\mathrm{q}) = \mathrm{p}'(x).$$

所以条件其实就是对所有 x 都有 $\mathrm{p}'(x)=0$，因此

$$\mathrm{p}(x)=c, \qquad \text{为一常数}$$

（等价地，$\mathrm{q}(x)=c/\sqrt{1+4x^2}$）。反过来，每一个常数 c 都可行，因为只要新曲线的斜率有定义，上述每一步都是可逆的。

新曲线是一条*平行曲线*（parallel curve）：抛物线（parabola）上每一点都沿着该点的法线被推移一段固定距离 c。下图所示为 $c=\frac{1}{2}$ 的情况。



有一处细微之处：$\mathrm{d}X/\mathrm{d}x=1+2\mathrm{q}+2x\mathrm{q}'$，代入 $\mathrm{q}=c/N$ 后可化简为 $1+2c/N^3$。当 $c>-\frac{1}{2}$ 时，它恒为正数，所以推移曲线是一条光滑曲线。若 $c\le-\frac{1}{2}$（即向上推移至少 $\frac{1}{2}$，亦即顶点处的曲率半径（radius of curvature）），它会在 $N^3=-2c$ 之处变为零，推移曲线便在该处出现尖点（cusp）。

验算

- 在 (i) 中取 $k=2$ 及 $x=1$：$\mathrm{p}(1)=\sqrt{5}$，而 $\mathbf{s}=(1,1)+\sqrt{5}\cdot\frac{1}{\sqrt{5}}(2,-1)=(3,0)$，一如所求位于 x 轴上；但 $|\mathbf{r}|=\sqrt{2}\neq\sqrt{5}$，所以 $k=2$ 不符合要求。
- 在 (ii) 中，当 $x=0$ 时，常数为 c 的推移曲线通过 $(0,-c)$，而根据对称性，它在该处的斜率为 0，与抛物线顶点的斜率吻合。
- 以数值验证，取 $c=1$ 及 $x=0.8$，用有限差分（finite difference）计算推移曲线的斜率，结果与 $2x=1.6$ 相符；若改用非常数的 $\mathrm{p}=x^2$，得出的斜率则约为 0.41。

常见错误

- 误用向上的法向量 $(-\mathrm{f}',1)/N$：$\mathbf{s}$ 中的正负号会全部相反。

- 把新曲线的斜率写成 $\mathrm{d}Y/\mathrm{d}x$，而不是 $(\mathrm{d}Y/\mathrm{d}x)/(\mathrm{d}X/\mathrm{d}x)$；新曲线的 x 坐标是 X，而不是 x。
- 在 (i) 中，只比较指数（$4k-2=2$）便断定 $k=1$，而没有同时检查系数 $k^2=1$。

STEP 之外

以固定距离推移而成的曲线称为*平行曲线*或*偏移曲线*（offset curve），它们在实际应用中十分重要：铣床（milling machine）刀具的中心，正是沿着所切削形状的平行曲线移动。当偏移距离超过曲率半径时出现的尖点，都位于*渐屈线*（evolute）之上，即曲率中心的轨迹（locus），它是曲线微分几何（differential geometry）中的核心对象。Pressley 的 *Elementary Differential Geometry*（初等微分几何）是一本很好的入门书。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。