详细解答

STEP I 1990，第 13 题

力学 · 摩擦力与刚体平衡

STEP I 1990，第 13 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

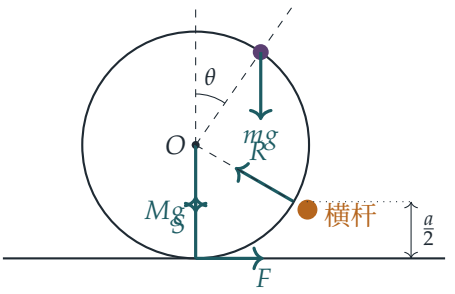
step.maths.org/questions/90-s1-q13

关键思路

先处理质点（particle）：它只是一个置于粗糙斜面上的普通质点，而该斜面就是圆柱体在接触点处的切平面（tangent plane）。然后留意，由于质点处于平衡（equilibrium），它施于圆柱体的总力就只是它的重量，并且通过接触点铅垂向下作用。对圆柱体的中心取力矩（moments），除了这个力和来自平面的摩擦力（friction）之外，其余各力全部消失，这是最快捷的入手方法。

解答

把质点视为质量为 m 的点质量，把圆柱体视为质量为 M 的均匀刚体（rigid body）圆柱，其质心（centre of mass）O 位于轴上。横杆是光滑的，所以它只施加法向力；平面和圆柱体表面则是粗糙的，摩擦系数（coefficient of friction）为 μ。一切都发生在通过 O 的铅垂横截面内，以下我们只考虑这个截面。把横杆放在右边。



图中显示作用于圆柱体的各个力（质点位置的 mg 会在第二部分解释）。箭咀并非按比例绘画。

质点的平衡

在接触点 P，向外的法线与向上的铅垂线成 θ 角，所以该处的切平面是一个与水平成 θ 角的斜面。作用于质点的力有：它的重量 mg、沿向外法线方向的法向反作用力（normal reaction）N，以及沿切线、指向斜面上方的摩擦力 f。沿法线方向及垂直于法线方向分解，

$$N = mg\cos\theta, \qquad f = mg\sin\theta.$$

只要 $f \le \mu N$，摩擦力便足以提供这个力，即

$$\tan\theta \le \mu, \qquad \text{等价于} \qquad \theta \le \arctan\mu.$$

（我们需要 $0 \le \theta < 90^\circ$ 才能使 N 为正，而由于质点位于圆柱体的上半部，这是成立的。）

放手后圆柱体的平衡

> ? **想一想** 质点以一个法向力和一个摩擦力压在圆柱体上。我们需要分开处理这两个力吗?

不需要。根据牛顿第三定律（Newton's third law），圆柱体在 P 点受到 $-N$ 和 $-f$。由于 N 与 f 合起来抵销质点的重量，它们的和是铅垂向上的 mg，所以质点施于圆柱体的总力是铅垂向下、作用于 P 点的 mg。它的作用线与 O 的水平距离为 $a\sin\theta$，位于横杆的一侧。

作用于圆柱体的其他力有：

- 它的重量 Mg，作用于 O；
- 横杆的反作用力 R，垂直于圆柱体表面，因此沿半径指向 O。横杆的接触点高度为 $a/2$，即在 O 之下 $a/2$，所以这条半径与向下的铅垂线成 60°。因此 R 有一个背离横杆的水平分量 $\frac{\sqrt{3}}{2}R$ 和一个向上的分量 $\frac{1}{2}R$；
- 在最低点，有向上的法向反作用力 S 和水平方向的摩擦力 F（取其方向为指向横杆）。

对 O 取力矩。Mg、R 和 S 的作用线全部通过 O。质点的 mg 的力矩为 $mga\sin\theta$（使圆柱体转向横杆），而 F 作用于 O 之下距离 a 处，转向相反。所以

$$Fa = mga\sin\theta \quad \Longrightarrow \quad F = mg\sin\theta.$$

这是正数，所以摩擦力确实如图所示指向横杆。（若没有横杆，圆柱体会向横杆那一侧滚动；这就是为甚么质点必须在那一侧，横杆才会有用。）

水平方向分解：$\frac{\sqrt{3}}{2}R = F$，所以

$$R = \frac{2mg\sin\theta}{\sqrt{3}} > 0,$$

这与横杆只能推而不能拉相符。

铅垂方向分解：

$$S = (M+m)g - \tfrac{1}{2}R = (M+m)g - \frac{mg\sin\theta}{\sqrt{3}},$$

由于 $\sin\theta < 1 < \sqrt{3}$ 且 $M > 0$，这是正数，所以圆柱体不会离开平面。

只要 $F \le \mu S$，平面便能提供所需的摩擦力：

$$m\sin\theta \le \mu\left[(M+m) - \frac{m\sin\theta}{\sqrt{3}}\right] \iff m\sin\theta\left(\sqrt{3}+\mu\right) \le \sqrt{3}\,\mu\,(M+m).$$

所以，放手之后，只要 $\tan\theta \le \mu$ 与

$$\boxed{\sin\theta \le \frac{\sqrt{3}\,\mu\,(M+m)}{m\,(\sqrt{3}+\mu)}}$$

同时成立，两个物体便能保持平衡。（光滑的横杆处不需要摩擦力，而质点与圆柱体之间的摩擦力已在第一部分处理。）

最后部分

当 $m = 7M$ 及 $\mu = \frac{3}{4}$ 时，质点的条件是 $\tan\theta \le \frac{3}{4}$，即 $\sin\theta \le \frac{3}{5}$。圆柱体的条件是

$$\sin\theta \le \frac{\sqrt{3}\cdot\frac{3}{4}\cdot 8M}{7M\,(\sqrt{3}+\frac{3}{4})} = \frac{24\sqrt{3}}{7(4\sqrt{3}+3)} = \frac{24\sqrt{3}\,(4\sqrt{3}-3)}{7\cdot 39} = \frac{24(4-\sqrt{3})}{91}.$$

哪一个较严格？我们有

$$\frac{24(4-\sqrt{3})}{91} < \frac{3}{5} \iff 120(4-\sqrt{3}) < 273 \iff 207 < 120\sqrt{3} \iff 42849 < 43200,$$

这是成立的。所以圆柱体在平面上滑动才是真正起限制作用的条件（仅仅如此），而能保持平衡的最大 θ 值是

$$\theta_{\max} = \arcsin\frac{24(4-\sqrt{3})}{91} \approx 36.7^\circ,$$

仅略小于 $\arctan\frac{3}{4} \approx 36.9^\circ$。

验算

- 极限情况 $M \to \infty$：圆柱体的条件变得形同虚设，因为非常重的圆柱体总能靠摩擦力固定；只剩下 $\tan\theta \le \mu$。
- 当 $\theta \to 0$ 时，质点位于顶部，它的重量通过 O，而 $F = R = 0$：正如所料，不需要横杆或摩擦力。

- 数值上，随机选取 20 000 组 M, m, a, μ, θ，直接由原始的力向量解出三条平衡方程，结果每次都与方框内的条件吻合；当 $m = 7M$、$\mu = 0.75$ 时，对 θ 作精细扫描，得到 $\theta_{\max} \approx 36.737^\circ$，而 $\sin\theta_{\max} \approx 0.59814$。

常见错误

- 把横杆的力当作水平方向。它垂直于圆柱体表面，所以沿半径方向，在这里是与水平成 30° 向上。
- 忘记横杆的力有向上的分量 $\frac{1}{2}R$，它会减小 S，从而减小平面所能提供的摩擦力。
- 做到 $\theta = \arctan\frac{3}{4}$ 便停下来，没有与圆柱体的条件比较，而后者（稍为）更严格。

STEP 之外

这里用到的技巧，是把质点的接触力换成一个等于其重量的合力（resultant）。由此可以初步窥见一个想法：作用于刚体的任何力系，都可以化简为通过某个选定点的单一力再加上一个力偶（couple）。具有多个摩擦接触点的刚体静力学（statics）是大学一年级的标准课题，而“哪一个接触点先滑动”这个问题，会引申到更微妙的情况：摩擦力并不能单靠方程确定。Kleppner 与 Kolenkow 合著的 *An Introduction to Mechanics*（力学入门教科书）对力、力矩和刚体平衡有严谨的论述。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。