详细解答

STEP I 1990，第 12 题

力学 · 弹簧与能量

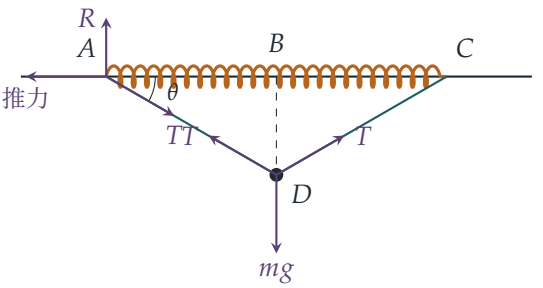
> **STEP I 1990，第 12 题**
>
> 继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：
>
> step.maths.org/questions/90-s1-q12

关键思路

这里除了质点之外，所有物件都是轻的，所以两端 A 和 C 所受的力必须完全平衡：绳子对每一端的水平拉力，等于被压缩的弹簧的推力。这就给出平衡条件。至于运动，能量是最自然的工具：唯一的动能是质点的动能，所以质点静止的时刻，正正就是势能（potential energy）回到初始值的时刻。

解答

模型。弹簧和绳子都是轻的，绳子不可伸长（inextensible），而杆是光滑的，所以杆只能沿垂直方向推弹簧。由于整个系统关于通过 B 的垂直线对称，质点 D 一直位于 B 的正下方，且 $AD = DC = l$。设 T 为每半段绳子的张力（tension），θ 为每半段绳子与杆所成的角。



平衡

当 $\theta = \pi/6$ 时，AC 的一半长度是 $l\cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}l$，所以

$$AC = \sqrt{3}\,l < 2l,$$

弹簧被压缩了 $(2-\sqrt{3})l$。根据虎克定律（Hooke's law），它对 A（以及对 C）施加向外的推力（thrust）

$$\frac{\lambda(2-\sqrt{3})l}{2l} = \lambda\Big(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\Big).$$

在 D 沿垂直方向分解力：$2T\sin\frac{\pi}{6} = mg$，所以 $T = mg$。

在 A 沿水平方向分解力：

> **想一想** A 处明明甚么也没有，为甚么可以在那里列出力的平衡?

弹簧的末端是一个轻的点：质量为零的物体若受到任何净力，加速度便会是无限大，所以它所受的力必须在每一刻都平衡（而不仅是在平衡状态下）。杆是光滑的，所以它的反作用力（reaction）R 是垂直的，水平方向就只有绳子和弹簧在起作用：

$$T\cos\frac{\pi}{6} = \lambda\Big(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\Big) \quad\Longrightarrow\quad mg\,\frac{\sqrt{3}}{2} = \lambda\,\frac{2-\sqrt{3}}{2},$$

所以

$$mg = \lambda\,\frac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \lambda\Big(\frac{2}{\sqrt{3}} - 1\Big),$$

这正是所要证明的结果。

势能

设 $AC = 2xl$，则绳子拉紧时 $0 < x \le 1$。AC 的一半是 xl，而 $AD = l$，所以由毕氏定理（Pythagoras' theorem），D 在杆下方的深度为

$$BD = l\sqrt{1-x^2}$$

。弹簧的伸长量是 $2xl - 2l$, 所以它的弹性势能（elastic energy）是 $\frac{\lambda(2l-2xl)^2}{2\cdot 2l} = \lambda l(1-x)^2$。取杆为重力势能（gravitational potential energy）的零位，

$$V(x) = \lambda l(1-x)^2 - mgl\sqrt{1-x^2}.$$

作为一致性的检查，

$$V'(x) = -2\lambda l(1-x) + \frac{mglx}{\sqrt{1-x^2}},$$

而在 $x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ 处（这时 $\cos\theta = x$，所以 $\theta = \frac{\pi}{6}$），上式为零的充要条件正是 $mg\sqrt{3} = \lambda(2-\sqrt{3})$，也就是我们在上面求得的条件。

从 B 落下

起初质点位于 B，所以绳子沿着杆平放，$AC = 2l$ 而 $x = 1$。于是 $V(1) = 0$，系统由静止开始运动。

杆是光滑的，绳子不可伸长，所以没有能量损失；又因为弹簧和绳子都是轻的，唯一的动能（kinetic energy）就是质点的 $\frac{1}{2}mv^2$。因此在整个运动过程中

$$\tfrac{1}{2}mv^2 + V(x) = V(1) = 0.$$

> ? **想一想** 为甚么“静止下来”的意思是 $V(x) = 0$，而不是 $V'(x) = 0$?

质点静止时 $v = 0$，根据能量守恒（energy conservation），这表示 $V(x) = 0$。条件 $V'(x) = 0$ 描述的是平衡位置，那是质点运动得最快的地方，而不是它停下来的地方。所以 x 满足

$$\lambda(1-x)^2 = mg\sqrt{1-x^2}, \qquad \text{即} \qquad (1-x)^2 = \left(\frac{2}{\sqrt{3}} - 1\right)\sqrt{1-x^2}.$$

根 $x = 1$ 是起始位置。对于 $x < 1$，我们可以把两边除以 $\sqrt{1-x} > 0$ 再平方，得到一个较简洁的三次方程（cubic）：

$$(1-x)^3 = k^2(1+x), \qquad k = \frac{2}{\sqrt{3}} - 1 \approx 0.15470, \quad k^2 \approx 0.023932.$$

这里平方是稳妥的，因为 $(1-x)^{3/2} = k\sqrt{1+x}$ 的两边都是正数。设 $f(x) = (1-x)^3 - k^2(1+x)$。则

$$f(0.65) = 0.042875 - 0.039488 \approx +0.0034,$$
$$f(0.66) = 0.039304 - 0.039727 \approx -0.0004,$$

所以在 0.65 与 0.66 之间有一个根，而且非常接近 0.66。由于 $f'(x) = -3(1-x)^2 - k^2 < 0$，$f$ 是严格递减（strictly decreasing）的，所以这是唯一满足 $x < 1$ 的根。质点下一次静止时 $x \approx 0.66$（更精确地说 $x \approx 0.6589$），这时 D 在杆下方的深度约为 $0.75l$。

验算

- 在 $\theta = \pi/6$ 处，取 $\lambda = l = m = 1$ 及 $g = \frac{2}{\sqrt{3}} - 1$，$A$ 处的水平拉力和弹簧的推力都等于 0.13397，而 V 在 $x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ 处的数值导数为零（且 $V'' > 0$，所以这个平衡是稳定的）。
- 用二分法（bisection）求得根 $x = 0.658861$；另外，就 D 的深度 y，由静止于 $y = 0$ 开始，以 RK4 逐步计算运动方程 $m\ddot{y} = mg - 2\lambda(1-x)\,y/(lx)$，结果显示质点首次停下时 $x = 0.658861$，两者吻合。

- 平衡时的值 $x = \frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0.866$ 位于 0.66 与 1 之间，这是必然的：质点围绕平衡位置振荡。

常见错误

- 以为弹簧是被拉长的。这里 $AC < 2l$，所以弹簧是被压缩的，它把 A 和 C 向外推开。
- 以 $V'(x) = 0$ 来求静止位置。这样求得的是平衡位置，那里速率最大。
- 忘记了重力势能在杆的下方是负的，结果得出一条在 $(0, 1)$ 内无解的能量方程。

STEP 之外

“无质量的物体所受的净力必为零”这个想法是一个约束（constraint），而不是一条运动定律。这类问题用拉格朗日力学（Lagrangian mechanics）处理最为干净利落：你只需用单一个坐标（这里是 x）写下一个能量函数，约束力根本不会出现。势能 $V(x)$ 还可以通过 V'' 给出围绕平衡位置的小振荡（small oscillations）的周期。Kleppner 与 Kolenkow 的 *An Introduction to Mechanics*（力学导论）正是以这种精神讲解能量方法和小振荡。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。