详细解答

STEP I 1990，第 11 题

力学 · 抛体与动量

> **STEP I 1990，第 11 题**
>
> 继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：
>
> step.maths.org/questions/90-s1-q11

关键思路

整个过程分为三个阶段：先是普通的抛体（projectile）运动，直至飞行的最高点；然后是一次瞬时碰撞（接住炮弹）；最后是一次瞬时“爆炸”（推开炮弹）。在两个瞬时阶段中，重力来不及起作用，所以炮弹与超人组成的系统动量守恒（conservation of momentum），而且在每个方向上各自守恒。此后炮弹再次成为抛体，从已知的高度以已知的向下速率出发。

解答

我们把炮弹和超人都视为质点（particle），忽略空气阻力，并假设炮弹从水平地面发射，最后亦落在水平地面上。取 x 为沿运动方向的水平方向，y 为垂直向上。

直至飞行的最高点

炮弹初速度的分量为

$$u_x = v\cos\tfrac{\pi}{3} = \tfrac{1}{2}v, \qquad u_y = v\sin\tfrac{\pi}{3} = \tfrac{\sqrt{3}}{2}v.$$

在最高点，垂直速度为零，所以所需时间和到达的高度分别是

$$t_1 = \frac{u_y}{g} = \frac{\sqrt{3}\,v}{2g}, \qquad H = \frac{u_y^2}{2g} = \frac{3v^2}{8g}.$$

此刻炮弹正以速率 $\frac{1}{2}v$ 水平运动。

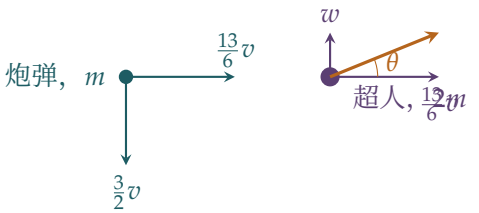
接住炮弹

超人以 $3v$ 的速率水平飞行，从后方接住炮弹，然后两者一起运动。在（瞬时的）接住过程中水平动量守恒，所以若 V 是两者的共同速率，则

$$2m(3v) + m\left(\tfrac{1}{2}v\right) = 3mV \quad\Longrightarrow\quad V = \frac{13v}{6}.$$

此刻两者都没有垂直速度，所以合起来的垂直动量为零。

推开炮弹



超人现在把炮弹垂直向下推。这一推是内部冲量（impulse），所以两者的总动量在两个方向上都保持不变。

水平方向：炮弹保持水平速率 $\frac{13}{6}v$。总水平动量仍然是 $3m \cdot \frac{13}{6}v$，所以超人的水平速率同样保持为 $\frac{13}{6}v$。（这并不意外：冲量是垂直方向的。）

垂直方向：总垂直动量原本为零，所以若超人以速率 w 向上运动，则

$$2m\,w - m\left(\tfrac{3}{2}v\right) = 0 \quad\Longrightarrow\quad w = \tfrac{3}{4}v.$$

> ? **想一想** 重力自始至终都在作用，为甚么我们仍然可以使用动量守恒？

接住和推开都是瞬时发生的。重力是有限的力，所以在长度为零的时间区间内，它的冲量为零；真正起作用的只有超人与炮弹之间巨大而短暂的内力，而这些内力成对地互相抵消。

炮弹余下的飞行

炮弹现在从高度 $H = \frac{3v^2}{8g}$ 出发，垂直向下的速率为 $\frac{3}{2}v$。取 s 以向下为正，炮弹经过时间 t_2 后到达地面，其中

$$\tfrac{3}{2}v\,t_2 + \tfrac{1}{2}g t_2^2 = \frac{3v^2}{8g}.$$

两边乘以 $8g$，得到一个关于 gt_2 的二次方程：

$$4(gt_2)^2 + 12v(gt_2) - 3v^2 = 0 \quad\Longrightarrow\quad gt_2 = \frac{-12v + \sqrt{144v^2 + 48v^2}}{8} = \frac{-12 + 8\sqrt{3}}{8}\,v,$$

由于 $t_2 > 0$，这里取正根。所以

$$t_2 = \left(\sqrt{3} - \tfrac{3}{2}\right)\frac{v}{g}.$$

（这是正数，因为 $\sqrt{3} \approx 1.732 > 1.5$。）总飞行时间为

$$\begin{aligned} T = t_1 + t_2 &= \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{v}{g} + \left(\sqrt{3} - \frac{3}{2}\right)\frac{v}{g} \\ &= \frac{3(\sqrt{3}-1)}{2}\frac{v}{g} \;\approx\; 1.10\,\frac{v}{g}. \end{aligned}$$

超人的运动方向

紧接推开炮弹之后，超人的速度分量为水平方向 $\frac{13}{6}v$ 和向上 $\frac{3}{4}v$。因此他的轨迹起初与水平成仰角 θ，其中

$$\tan\theta = \frac{\frac{3}{4}v}{\frac{13}{6}v} = \frac{9}{26}, \qquad \theta = \arctan\frac{9}{26} \approx 19.09^\circ,$$

所以该角准确至最接近的度数是 19°。

验算

- 若没有超人，炮弹会在时间 $2t_1 = \sqrt{3}\,v/g \approx 1.73\,v/g$ 落地。把炮弹向下推理应缩短飞行时间，而 $T \approx 1.10\,v/g$ 的确较小。
- 质量比：炮弹的质量是超人的一半，所以它得到的垂直速率应是超人的两倍，方向相反。事实正是如此：$\frac{3}{2}v = 2 \times \frac{3}{4}v$。
- 数值验证：取 $v = 13.7$ 和 $g = 9.81$，以 10^{-6} 为步长逐步计算炮弹从高度 H 下落的过程，得 $t_2 \approx 0.32407\,\mathrm{s}$，与 $(\sqrt{3} - \frac{3}{2})v/g$ 吻合，而 $T \approx 1.5335\,\mathrm{s} = 1.0981\,v/g$。

常见错误

- 忘记了接住炮弹这一步：推开之后没有使用共同速率 $\frac{13}{6}v$，而是用了炮弹本身的水平速率 $\frac{1}{2}v$，或超人的 $3v$。
- 忽略质量，以为超人向上的速率是 $\frac{3}{2}v$。
- 取了二次方程的负根，或把 t_2 加到 $2t_1$ 而不是 t_1 上。

STEP 之外

接住炮弹是一次完全非弹性碰撞（perfectly inelastic collision），而推开炮弹则是它的逆过程，即一次爆炸：同一条守恒定律在两个方向上都适用，只是动能（kinetic energy）在前者中损失，在后者中得到补充。在大学一年级的课程中，这会发展成冲力（impulsive force）和系统质心（centre of mass）的一般理论：无论系统各部分之间互相推撞得多么猛烈，质心的运动只取决于外力。Kleppner 与 Kolenkow 合著的 *An Introduction to Mechanics*（力学入门）正是本着这种精神处理动量、冲量和质心。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。