详细解答

STEP I 1990，第 10 题

力学 · 功率与阻力

STEP I 1990，第 10 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/90-s1-q10

关键思路

“稳定速率”（steady speed）即是没有加速度，所以跑手的驱动力（driving force）恰好与各阻力平衡，而功率（power）等于驱动力乘以速率。唯一要留神的地方，是空气阻力（air resistance）取决于相对于空气的速率，而这个速率在去程和回程并不相同。至于题目的后半部分，应该考虑总能量（energy）而不是功率：每一程所消耗的能量等于阻力乘以距离，于是固定的能量预算就化为两个速率之间的一个线性条件。

解答

稳定速率与完成赛事的时间

把跑手看成沿直线运动的质点（particle）。设 v（单位为 $\mathrm{m\,s^{-1}}$）为跑手在某一程的对地速率，D（单位为 N）为跑手产生的向前驱动力。阻力分别为 50 N 和 $2w$ N，两者分别阻碍相对于地面和相对于空气的运动。



沿跑道方向分解各力，由于以稳定步速前进时加速度为零，所以

$$D = 50 + 2w.$$

跑手作功的速率等于驱动力乘以其作用点的速率，所以 $300 = Dv$。

去程。风以 $3\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ 的速率顺着跑手的运动方向吹。若 $v > 3$，跑手相对于空气以 $w = v - 3$ 向前运动，空气阻力向后作用。（下文会验证 $v > 3$。）于是 $D = 50 + 2(v-3) = 44 + 2v$，

而

$$v_1(44+2v_1)=300 \iff v_1^2+22v_1-150=0 \iff v_1=-11+\sqrt{271}\approx 5.462,$$

这里取正根。这个值确实大于 3，所以假设成立。（另一个看法：当 $v=3$ 时没有空气阻力，所需功率只是 $3\times 50=150<300\,\mathrm{W}$，所以跑手必定跑得比风快。）

回程。这时跑手逆风而跑，所以 $w=v+3$，而 $D=50+2(v+3)=56+2v$：

$$v_2(56+2v_2)=300 \iff v_2^2+28v_2-150=0 \iff v_2=-14+\sqrt{346}\approx 4.601.$$

时间。忽略起跑和折返时的加速过程，

$$T_0=\frac{5000}{v_1}+\frac{5000}{v_2}\approx 915.4+1086.7=2002.1,$$

所以完成赛事需时 2002 s（准确至最接近的秒），即大约 33 分 22 秒。

另一种策略

现在假设跑手去程以 x_1 W、回程以 x_2 W 的功率作功，稳定速率分别为 v_1 和 v_2。力的平衡关系不变，所以只要 $v_1>3$，

$$x_1=v_1(44+2v_1), \qquad x_2=v_2(56+2v_2).$$

去程所需时间为 $5000/v_1$，所以去程消耗的能量为

$$x_1\cdot\frac{5000}{v_1}=5000(44+2v_1),$$

这正好是阻力乘以距离，理应如此。同样地，回程消耗 $5000(56+2v_2)$。因此总能量为

$$E=5000(100+2(v_1+v_2)).$$

想一想 固定的总能量在哪里派上用场?

跑手消耗的总能量必须与原来的赛事相同，所以 E 是一个固定的数。由于 E 只通过 v_1+v_2 取决于两个速率，这个和就被确定了：

$$v_1+v_2=\frac{E}{10\,000}-50,$$

无论 x_1 和 x_2 怎样选取都是如此。这就证明了所求结果。它的值就是原来赛事中的值，

$$S=v_1+v_2=\sqrt{271}+\sqrt{346}-25\approx 10.063.$$

最佳策略。现在完成赛事的时间为

$$T=5000\left(\frac{1}{v_1}+\frac{1}{v_2}\right)=\frac{5000\,(v_1+v_2)}{v_1v_2}=\frac{5000\,S}{v_1v_2}.$$

由于 S 固定，当 $v_1 v_2$ 最大时这个时间最小。根据算术—几何平均不等式（AM–GM inequality），$v_1 v_2 \le (\frac{S}{2})^2$，等号恰好在 $v_1 = v_2 = \frac{S}{2}$ 时成立。所以最佳方案是来回都以相同的速率跑，即 $\frac{S}{2} \approx 5.032\,\mathrm{m\,s^{-1}}$。这仍然比风快，所以去程中 x_1 的公式依然有效。最短时间为

$$T_{\min} = \frac{5000\,S}{S^2/4} = \frac{20\,000}{S} \approx 1987.4\ \mathrm{s}.$$

跑手节省了 $T_0 - T_{\min} \approx 2002.1 - 1987.4 = 14.7\,\mathrm{s}$，即大约 15 秒，正如题目所求。所用功率约为去程 $x_1 \approx 272\,\mathrm{W}$、回程 $x_2 \approx 332\,\mathrm{W}$：跑手在顺风时放松一点，逆风时则加把劲。

验算

- 能量是否一致：$300 \times 2002.105 \approx 600\,632\,\mathrm{J}$，而 $5000(100 + 2 \times 10.0632) \approx 600\,632\,\mathrm{J}$ 亦然。
- 若没有风，两程都会得出 $v^2 + 25v - 150 = 0$，所以 $v = 5$，两种方法就会完全一致。正是有风，才有可能节省时间。
- 我们以数值方法验证过：随机选取 1000 个 x_1 的值（x_2 由能量预算确定），都有 $v_1 + v_2 = 10.0632$；没有任何选择能快过 $1987.4\,\mathrm{s}$；节省的时间为 $14.66\,\mathrm{s}$。

常见错误

- 在空气阻力一项中用了对地速率，而不是相对于空气的速率；又或者在其中一程把风的正负号弄反了。
- 以为来回用相同的*功率*才算合理：其实是来回用相同的*速率*才令时间最短。
- 试图单凭功率方程证明 $v_1 + v_2$ 为常数。你需要用到总能量固定这个条件。

STEP 之外

最后一部分是一个小型的约束优化（constrained optimisation）问题：在一个线性约束条件下，求 $1/v_1 + 1/v_2$ 的最小值。这里用 AM–GM 不等式就能解决，但一般的工具是大学一年级课程会学到的拉格朗日乘数法（method of Lagrange multipliers），而同样的想法也支配着单车和赛艇运动中的最佳配速。若想看对功、功率和阻力的严谨论述，可参阅 Kleppner 与 Kolenkow 的 *An Introduction to Mechanics*（力学入门教科书）。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。