详细解答

STEP I 1990，第 1 题

纯数学 · 三角函数的最优化

> **STEP I 1990，第 1 题**
>
> 继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：
>
> step.maths.org/questions/90-s1-q1

关键思路

窗帘的每个顶点与圆心 D 的距离都是 r，所以半径 DX 和 DY 把这个四边形分成三个以 D 为顶点的等腰三角形（isosceles triangle）。每个三角形的面积都是 $\frac{1}{2}r^2\sin(\text{顶角})$，而三个顶角之和为 π。这样，一道几何题就变成求几个正弦之和的最大值，而第一部分只需用和化积公式（sum-to-product formula）便可完成，完全不必动用微积分。

解答

窗帘的面积

由于 A、D、C 共线（collinear），在 D 处的各角满足

$$\angle ADX + \angle XDY + \angle YDC = \pi, \qquad \text{所以} \qquad \angle YDC = \pi - \theta - \alpha.$$

这里 $\theta \geq 0$、$\alpha > 0$ 且 $\theta + \alpha \leq \pi$，使得 X 和 Y 在弧上按 A, X, Y, C 的次序排列。

半径 DX 和 DY 把窗帘 $AXYC$ 分成三角形 ADX、XDY 和 YDC，每个三角形都有两条长度为 r 的边相交于 D。对每个三角形使用面积 $= \frac{1}{2}ab\sin C$，得

$$\begin{aligned} \text{面积} &= \tfrac{1}{2}r^2\sin\theta + \tfrac{1}{2}r^2\sin\alpha + \tfrac{1}{2}r^2\sin(\pi - \theta - \alpha) \\ &= \tfrac{1}{2}r^2[\sin\alpha + \sin\theta + \sin(\theta + \alpha)], \end{aligned}$$

因为 $\sin(\pi - u) = \sin u$。

固定 α 时的最佳 θ

当 α 固定时，只有 $\sin\theta + \sin(\theta+\alpha)$ 会变动。根据和化积公式 $\sin P + \sin Q = 2\sin\frac{P+Q}{2}\cos\frac{P-Q}{2}$，

$$\sin\theta + \sin(\theta+\alpha) = 2\cos\tfrac{\alpha}{2}\,\sin\left(\theta+\tfrac{\alpha}{2}\right).$$

> **想一想** 为甚么这样一写，最大值就一目了然?

因子 $2\cos\frac{\alpha}{2}$ 是一个固定的正常数，因为 $0 < \frac{\alpha}{2} < \frac{\pi}{2}$。所以面积最大，恰好就是 $\sin(\theta+\frac{\alpha}{2})$ 最大的时候。当 θ 取遍 $[0, \pi-\alpha]$ 时，角 $\theta+\frac{\alpha}{2}$ 取遍 $[\frac{\alpha}{2}, \pi-\frac{\alpha}{2}]$，而这个区间包含 $\frac{\pi}{2}$。因此正弦可以达到它的最大可能值 1，此时 $\theta+\frac{\alpha}{2} = \frac{\pi}{2}$，即

$$\boxed{\theta = \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2} = \frac{\pi-\alpha}{2}.}$$

这时同样有 $\angle YDC = \pi - \theta - \alpha = \frac{\pi-\alpha}{2} = \theta$：最佳的窗帘关于垂直的半径对称，与直觉相符。对这个 α 而言，最大面积是

$$\tfrac{1}{2}r^2\left[\sin\alpha + 2\cos\tfrac{\alpha}{2}\right].$$

让 α 变动

现在我们要在 $0 < \alpha < \pi$ 的范围内求 $f(\alpha) = \sin\alpha + 2\cos\frac{\alpha}{2}$ 的最大值。（对每个 α，最大面积是 $\frac{1}{2}r^2 f(\alpha)$，所以整体的最大面积就是 $\frac{1}{2}r^2$ 乘以 f 的最大值。）求导数（differentiate），得

$$f'(\alpha) = \cos\alpha - \sin\tfrac{\alpha}{2}.$$

设 $s = \sin\frac{\alpha}{2}$，于是 $0 < s < 1$，再利用 $\cos\alpha = 1 - 2\sin^2\frac{\alpha}{2}$：

$$f'(\alpha) = 1 - s - 2s^2 = (1-2s)(1+s).$$

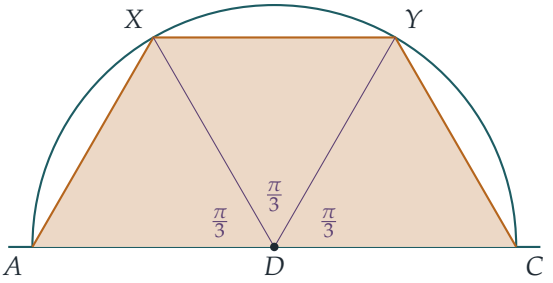
由于 $1+s > 0$，f' 的正负号与 $1-2s$ 相同。因为 s 在 $(0,\pi)$ 上随 α 递增，f' 在 $s < \frac{1}{2}$ 时为正，在 $s > \frac{1}{2}$ 时为负。所以 f 先递增后递减，并在 $\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2}$ 处取得最大值，即 $\alpha = \frac{\pi}{3}$。在该处

$$f\left(\tfrac{\pi}{3}\right) = \sin\tfrac{\pi}{3} + 2\cos\tfrac{\pi}{6} = \tfrac{\sqrt{3}}{2} + \sqrt{3} = \tfrac{3\sqrt{3}}{2},$$

所以窗帘的最大可能面积是

$$\boxed{\tfrac{1}{2}r^2 \cdot \tfrac{3\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{4}r^2.}$$

此时 $\alpha = \theta = \angle YDC = \frac{\pi}{3}$，所以三个三角形都是等边三角形，而窗帘正是内接（inscribed）于整个圆的正六边形（regular hexagon）的一半。



验算

- 极限情况：当 $\alpha \to 0$ 时，窗帘变成三角形 AXC，其中 X 位于最高点，面积为 $\frac{1}{2} \cdot 2r \cdot r = r^2$，而确实有 $\frac{1}{2}r^2 f(0) = r^2$。当 $\alpha \to \pi$ 时，窗帘塌缩到直径上，而 $f(\pi) = 0$。最大值 $\frac{3\sqrt{3}}{4}r^2 \approx 1.299r^2$ 比两者都大，同时小于半圆的面积 $\frac{\pi}{2}r^2 \approx 1.571r^2$，这是必然的。
- 数值验证：我们随机选取 X 和 Y 的位置，把三个三角形的面积公式与鞋带公式（shoelace formula）互相核对；又对若干个 α 的值，用细密的网格搜索找出最佳的 θ；并发现取 $r = 1$ 时，对 θ 和 α 同时搜索所得的最大面积为 $1.299038\ldots = \frac{3\sqrt{3}}{4}$。

常见错误

- 遗漏第三个三角形 YDC，或者把它的角写成 $\pi - \alpha$ 而不是 $\pi - \theta - \alpha$。
- 在第二部分直接取 $\theta = \alpha = \frac{\pi}{3}$ 这条捷径，却没有给出理由。必须用微积分（或对称性的论证）才能证明最佳的窗帘确实是正六边形的一半。

STEP 之外

这个答案是一个经典结果的特殊情况：在内接于同一个圆的所有 n 边形之中，以正多边形的面积最大。有一个简洁的证明，用到 sin 在 $[0, \pi]$ 上的凹性（concavity）和琴生不等式（Jensen's inequality）：若圆心角（central angle）$\phi_1, \ldots, \phi_n$ 之和为 2π，则 $\sum \sin \phi_i \leq n \sin \frac{2\pi}{n}$。我们的窗帘就是 $n = 6$ 这个情况的一半。凸性（convexity）和这类不等式是大学一年级分析（analysis）课程中贯穿始终的主题；Abbott 的 *Understanding Analysis* 是正式认识这些概念的好起点，而 Siklos 的 *Advanced Problems in Mathematics* 则收录了更多同类风格的 STEP 题目。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。