详细解答

STEP III 1989，第 9 题

纯数学 · 幂级数求和

STEP III 1989，第 9 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/89-s3-q9

关键思路

每个级数（series）都是一个熟悉的幂级数（power series）$\sum a_r x^r$ 在某个特定的 x 处的取值，所以要做的就是认出它是哪一个。几何级数（geometric series）$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots$ 是头两个级数的源头。对它求导，会带出一个因子 r；对它积分，则会除以 r。至于第三个，奇数的连乘积除以阶乘，正是指数为负分数的二项展开式（binomial expansion）所产生的形式。

解答

以下我们一直会用到：当 $|x| < 1$ 时，

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots = \sum_{r=1}^{\infty} x^{r-1}.$$

题目说明不必理会收敛（convergence）的问题，所以我们可以放心逐项求导、逐项积分。（我们用到的三个 x 值全都稳稳落在收敛区间（interval of convergence）之内，所以这样做其实是合理的。）

第 (i) 部分

通项是 $r\left(\frac{1}{2}\right)^{r-1}$，所以我们要求的是 $\sum rx^{r-1}$ 在 $x = \frac{1}{2}$ 处的值。把几何级数逐项求导，

$$\sum_{r=1}^{\infty} rx^{r-1} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{1}{1-x}\right) = \frac{1}{(1-x)^2}.$$

代入 $x = \frac{1}{2}$：

$$1 + \frac{2}{2} + \frac{3}{2^2} + \frac{4}{2^3} + \cdots = \frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)^2} = 4.$$

第 (ii) 部分

通项是 $\frac{1}{r}\left(\frac{1}{2}\right)^{r-1}$。求导可以抵销除以 r 这一步，所以这次我们改为积分。把几何级数由 0 积分至 x，

$$\sum_{r=1}^{\infty} \frac{x^r}{r} = \int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{1-t} = -\ln(1-x).$$

这里的幂次高了一次，所以我们除以 x（其中 $x \neq 0$）：

$$\sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{r} x^{r-1} = -\frac{\ln(1-x)}{x}.$$

代入 $x = \frac{1}{2}$：

$$1 + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{2^2} + \cdots = -\frac{\ln \frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = 2\ln 2.$$

第 (iii) 部分

设

$$c_k = \frac{1 \times 3 \times \cdots \times (2k-1)}{k!}, \qquad c_0 = 1.$$

? **想一想** 你以前在哪里见过奇数的连乘积除以 $k!$?

就在 $(1+y)^{-1/2}$ 的二项展开式里。y^k 的系数是

$$\binom{-\frac{1}{2}}{k} = \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\cdots\left(-\frac{2k-1}{2}\right)}{k!} = \frac{(-1)^k}{2^k} \cdot \frac{1 \times 3 \times \cdots \times (2k-1)}{k!} = \left(-\frac{1}{2}\right)^k c_k.$$

因此，取 $y = -2x$，正负号和 2 的幂便互相抵销：

$$(1-2x)^{-1/2} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-\frac{1}{2}}{k} (-2x)^k = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k = 1 + x + \frac{1 \times 3}{2!}x^2 + \frac{1 \times 3 \times 5}{3!}x^3 + \cdots,$$

此式在 $|2x| < 1$ 时成立。

现在仔细看看题目给出的级数。它的通项是 $c_k \cdot \frac{1}{3^{k-1}} = 3c_k\left(\frac{1}{3}\right)^k$，而且由 $k = 2$ 开始（首项是 $\frac{1\times 3}{2!} \times \frac{1}{3}$）。所以它等于上面的级数在 $x = \frac{1}{3}$ 处的值，去掉 $k = 0$ 和 $k = 1$ 两项之后，

再乘以 3：

$$\begin{aligned}\sum_{k=2}^{\infty} c_k \frac{1}{3^{k-1}} &= 3\left(\sum_{k=0}^{\infty} c_k \left(\tfrac{1}{3}\right)^k - c_0 - c_1 \cdot \tfrac{1}{3}\right)\\ &= 3\left(\left(1-\tfrac{2}{3}\right)^{-1/2} - 1 - \tfrac{1}{3}\right)\\ &= 3\left(\sqrt{3} - \tfrac{4}{3}\right)\\ &= 3\sqrt{3} - 4.\end{aligned}$$

这里 $\left(\frac{1}{3}\right)^{-1/2} = \sqrt{3}$，而 $x = \frac{1}{3}$ 满足 $|2x| < 1$。

验算

- 第 (i) 部分：部分和（partial sums）1, 2, 2.75, 3.25, 3.5625, … 逐步向 4 靠近，而把 200 项加起来，在机器精度之内得到 4。
- 第 (ii) 部分：$2\ln 2 \approx 1.3863$，而部分和 1, 1.25, 1.3333, 1.3646, … 与此吻合。
- 第 (iii) 部分：各项为 0.5, 0.2778, 0.1620, …，把 400 项加起来得到 1.196152…，与 $3\sqrt{3} - 4 \approx 1.1962$ 相符。再做一个简单的合理性检查：答案必须大于首项 0.5，而且是正数；这就排除了忘记去掉 $k = 1$ 一项的情况（那样会得到 $3\sqrt{3} - 3 \approx 2.196$，由于各项大致按几何级数递减，这个值太大了）。

常见错误

- 在 (ii) 中，忘记除以 x：$-\ln(1-x)$ 在 $x = \frac{1}{2}$ 处的值是 $\ln 2$，只有答案的一半。
- 在 (iii) 中，没有留意到级数由 $k = 2$ 开始，或者漏掉了由 $\frac{1}{3^{k-1}} = 3 \cdot \frac{1}{3^k}$ 而来的额外因子 3。

STEP 之外

幂级数在其收敛半径（radius of convergence）之内可以逐项求导和逐项积分，原因是幂级数在严格位于该半径之内的每一个闭区间上都一致收敛（converges uniformly）。这是大学一年级分析学（analysis）的标准结果，也正因如此，“不必考虑收敛问题”这句话在这里是稳妥的。指数并非整数的二项级数（binomial series），正是这一类幂级数。Abbott 的 *Understanding Analysis*（分析学入门教材）对一致收敛和幂级数有清晰的讲解。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。